Dinámica

MATEMÁTICA

GUÍA PARA EL DOCENTE

Libro versión para el docente y organización de los contenidos

1

puerto de palos

Índice de la guía para el docente

Capítulo 1: NÚMEROS NATURALES

1. Sistema de numeración decimal. 5
2. Multiplicación y división. 7
3. Potenciación y radicación. 11
4. Operaciones combinadas. 13
   Integración 1-2-3-4 17
5. Divisibilidad 19
6. Factorización. 21
7. Múltiplo común menor y divisor común mayor. 23
8. Lenguaje simbólico. Ecuaciones. 27
   Integración final 31

Capítulo 2: FRACCIONES Y EXPRESIONES DECIMALES

9. Números racionales. Representación en la recta. 33
10. Fracciones equivalentes. Comparación de fracciones. 35
11. Operaciones con fracciones. 37
12. Potenciación y radicación de fracciones. 41
13. Operaciones combinadas con fracciones 43
    Integración 9-10-11-12-13 47
14. Fracciones y expresiones decimales 49
15. Operaciones con decimales. Operaciones combinadas. 51
16. Aproximación y porcentaje. 55
    Integración final 61

Capítulo 3: FUNCIONES

17. Gráficos y tablas. 63
18. Funciones. 67
19. Función de proporcionalidad directa. 69
20. Función de proporcionalidad inversa. 71
    Integración final 73

Capítulo 4: CUERPOS

21. Clasificación de los cuerpos. 75
22. Poliedros regulares. 77
23. Desarrollo plano de los cuerpos. 79
24. Punto, recta y plano 83
    Integración final 85

Capítulo 5: ÁNGULOS

25. Ángulos. Sistema sexagesimal y operaciones. 87
26. Clasificación de ángulos. 89
27. Mediatriz de un segmento. 93
28. Bisectriz de un ángulo. 95
    Integración final 97

Capítulo 6: FIGURAS PLANAS

29. Triángulos. 99
30. Construcción de triángulos. 101
31. Cuadriláteros. 105
32. Construcción de cuadriláteros. 107
    Integración 29-30-31-32 111
33. Circunferencia y círculo. 113
34. Construcción de circunferencias. 115
35. Polígonos 117
36. Construcción de polígonos regulares. 119
    Integración final 123

Capítulo 7: PERÍMETRO, ÁREA Y VOLUMEN

37. Perímetro y área de figuras planas. 125
38. Área lateral y total de cuerpos. 131
    Integración 37-38 135
39. Unidades de capacidad y unidades de volumen. 137
40. Volumen de poliedros. 139
41. Volumen de cuerpos redondos. 143
    Integración final 147

Capítulo 8: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

42. Variables, población y muestra. 149
43. Frecuencias absolutas y relativas. 151
44. Promedio, mediana y moda. 155
45. Experimentos aleatorios. Probabilidad simple. 157
46. Cálculo combinatorio 159
    Integración final 161

Capítulo 9: NÚMEROS ENTEROS

47. Números negativos. 163
48. Orden y representación 165
49. Adición y sustracción. 167
50. Multiplicación y división. 169
51. Operaciones combinadas. 171
    Integración final 175

ORGANIZACIÓN DE LOS CONTENIDOS

NAP 177
Provincia de Buenos Aires 181
CABA 184

1 Números naturales

1. Sistema de numeración decimal

▶ SABERES DINÁMICOS

Nuestro sistema de numeración es:
- **decimal**, porque utiliza diez símbolos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
- **posicional**, porque el valor de cada cifra depende de la posición que ocupa en el número.

billón			mil de millón			millón			mil		
1	000		000			000			000		
unidad	centena	decena	unidad	centena	decena	unidad	centena	decena	unidad	centena	decena	unidad

Descomposición de números naturales

Los números naturales se pueden **descomponer** de distintas formas.

Número	Tipo de descomposición	Desarrollo
7281	Aditiva	7 000 + 200 + 80 + 1
	Multiplicativa	7 . 1 000 + 2 . 100 + 8 . 10 + 1
	En potencias de 10	$7 . 10^3 + 2 . 10^2 + 8 . 10^1 + 1 . 10^0$

TIP

Se usa el punto (.) como signo "por" de la multiplicación.

Todo número elevado a cero es 1.

$10^0 = 1$ $15^0 = 1$

$35\,720\,005 = 30\,000\,000 + 5\,000\,000 + 700\,000 + 20\,000 + 5$

$35\,720\,005 = 3 . 10\,000\,000 + 5 . 1\,000\,000 + 7 . 100\,000 + 2 . 10\,000 + 5 . 1$

$35\,720\,005 = 3 . 10^7 + 5 . 10^6 + 7 . 10^5 + 2 . 10^4 + 5 . 10^0$

Se lee: treinta y cinco millones setecientos veinte mil cinco.

$20\,107\,040 = 20\,000\,000 + 100\,000 + 7\,000 + 40$

$20\,107\,040 = 2 . 10\,000\,000 + 1 . 100\,000 + 7 . 1\,000 + 4 . 10$

$20\,107\,040 = 2 . 10^7 + 1 . 10^5 + 7 . 10^3 + 4 . 10^1$

Se lee: veinte millones ciento siete mil cuarenta.

Dinámica TConecta

Ingresen en https://puerto.pub/descom * para ver un video acerca de la descomposición de números naturales en suma de potencias de 10.

* Enlace acortado de https://www.youtube.com/watch?v=GAwKErTjiIE

Referencia del trabajo con capacidades

ApAp: Aprender a Aprender
TracO: Trabajo con Otros
Comu: Comunicación
PenCrit: Pensamiento crítico
CyRes: Compromiso y Responsabilidad

Con respecto a la capacidad **Resolución de Problemas**, no está distinguida porque se trabaja a lo largo de todas las actividades del libro.

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. ¿Cuánto es $8 . 10^3$? $8 . 1\,000 = 8\,000$
   b. Con los símbolos del sistema decimal, ¿cuántos números de 3 cifras se pueden escribir? Se pueden escribir 1 000 números de tres cifras.
   c. ¿Es correcto que $2 . 10^3 + 3 . 10 + 1$ es una descomposición de 231? No, la descomposición corresponde al número 2 031.
   d. Descompongan el número 3 204 en las tres formas vistas. ApAp

Aditiva: $3\,204 = 3\,000 + 200 + 4$
Multiplicativa: $3\,204 = 3 . 1\,000 + 2 . 100 + 4$
En potencias de 10: $3\,204 = 3 . 10^3 + 2 . 10^2 + 4 . 10^0$

ACTIVIDADES

1. Sistema de numeración decimal

1. Descompongan según las potencias de 10 los siguientes números.

a. $2\,034\,015 =$ $2 \cdot 10^6 + 3 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$

b. $392\,420 =$ $3 \cdot 10^5 + 9 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1$

c. $3 + 200 + 5\,000 + 40 =$ $5\,243 = 5 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$

d. $4 \cdot 1\,000 + 2 \cdot 10 + 7 =$ $4\,027 = 4 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$

2. Escriban el número que corresponde a cada representación.

a. $4 \cdot 100\,000 + 2 \cdot 1\,000 + 3 \cdot 10 =$ $400\,000 + 2\,000 + 30 = 402\,030$

b. $5 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3 + 10^2 + 5 =$ $5 \cdot 10\,000 + 8 \cdot 1\,000 + 100 + 5 = 50\,000 + 8\,000 + 100 + 5 = 58\,105$

c. $3 \cdot 10\,000 + 2 \cdot 10^4 + 5 \cdot 1\,000 + 3 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 1 =$ $30\,000 + 20\,000 + 5\,000 + 300 + 40 + 1 = 55\,341$

d. $2 \cdot 10^2 + 25 \cdot 10 + 3 =$ $200 + 250 + 3 = 453$

3. Escriban con letras cómo se leen los números de los ítems a. y c. de la actividad anterior.

Cuatrocientos dos mil treinta.

Cincuenta y cinco mil trescientos cuarenta y uno.

4. Completen con las cifras que faltan para que se verifique la igualdad.

a. $1 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^{1} + 3 = 1\,00\,053$

b. $2 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^{2} + 2 \cdot 10^{0} = 204\,302$

c. $3 \cdot 10^{2} + 9 \cdot 10^{0} + 5 \cdot 10 + 7 \cdot 10^3 = 7\,359$

d. $4 \cdot 10^{7} + 4 \cdot 10^{3} + 1 \cdot 10^{2} + 2 \cdot 10^{0} = 40\,004\,102$

5. Encuentren un número que cumpla con las condiciones pedidas en cada caso. Luego, revisen las respuestas con sus compañeros.

a. Es impar y menor que 100. Sus cifras suman 7 y la cifra de la decena supera en uno a la cifra de la unidad.

43 (impar y menor que 100; 4 + 3 = 7; 4 − 3 = 1)

b. Tiene tres cifras: la de la unidad es un número impar múltiplo de 5; otra vale $2 \cdot 10^2$, y la restante es el doble de la anterior.

245 ("5" es impar y múltiplo de 5; "2" vale $2 \cdot 10^2$; "4" es el doble de "2")

c. Tiene cuatro cifras: dos de ellas valen $5 \cdot 10$ y $7 \cdot 10^3$; la suma entre la cifra de la unidad de mil y la cifra de la unidad es 8, y la cifra de la centena supera en 2 a la cifra de la decena.

7 751 ("5" vale $5 \cdot 10$; el segundo "7" vale $7 \cdot 10^3$; 7 + 1 = 8; 7 − 5 = 2)

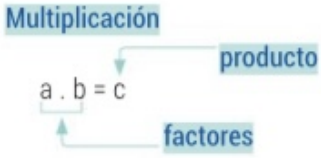
d. Es menor que 1 000: la suma entre la cifra de la centena y la cifra de la decena es 5 y la diferencia entre ambas es 1, y la cifra de la unidad es el doble de la cifra de la decena.

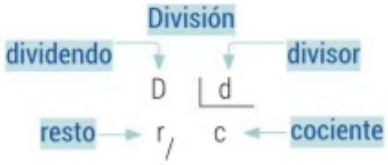
324 (menor que 1 000; 3 + 2 = 5; 3 − 2 = 1; "4" es el doble de "2")

2. Multiplicación y división

▶ SABERES DINÁMICOS

Los números que intervienen en una **multiplicación** y en una **división** tienen nombres especiales.





$D = d \cdot c + r$

Propiedades de la multiplicación

Asociativa: si se cambia el orden de los paréntesis, el resultado no varía. $(2 \cdot 13) \cdot 5 = 2 \cdot (13 \cdot 5)$	**Conmutativa:** el orden de los factores no cambia el resultado. $6 \cdot 8 = 8 \cdot 6$
Disociativa: un factor se puede descomponer en otros factores. $7 \cdot 12 = 7 \cdot (2 \cdot 6)$	**Elemento neutro:** el número 1 como factor no cambia el resultado. $25 \cdot 1 = 1 \cdot 25 = 25$

TIP

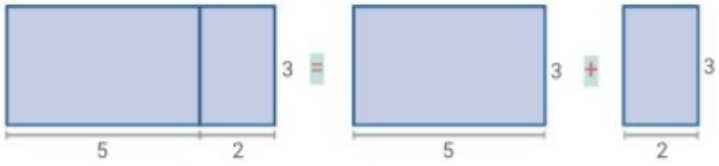
Los paréntesis se colocan para indicar que se resuelven primero las operaciones que ellos encierran.

Propiedad distributiva de la multiplicación

$(5 + 2) \cdot 3 = 5 \cdot 3 + 2 \cdot 3$

$7 \cdot 3 = 15 + 6$

$21 = 21$



$4 \cdot (6 - 1) = 4 \cdot 6 - 4 \cdot 1$

$4 \cdot 5 = 24 - 4$

$20 = 20$

Propiedad distributiva de la división

$(10 + 8) : 2 = 10 : 2 + 8 : 2$

$(24 - 15) : 3 = 24 : 3 - 15 : 3$

En la división solo se puede distribuir cuando la suma o la resta entre paréntesis se encuentra en el dividendo. Cada término debe ser múltiplo del divisor.

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. ¿Es cierto que $20 : (2 + 4) = 20 : 2 + 20 : 4$? No, en la división solo se puede distribuir únicamente cuando la suma o resta se encuentra entre paréntesis en el dividendo.
   b. ¿Es cierto que $2 \cdot 4 + 5 \cdot 4 = 7 \cdot 4$? Sí, porque se puede pensar en $7 \cdot 4 = (2 + 5) \cdot 4 = 2 \cdot 4 + 5 \cdot 4 = 28$.
   c. Realicen un dibujo que represente la aplicación de la propiedad distributiva en $(10 + 8) : 2 = 10 : 2 + 8 : 2$. Por ejemplo, pueden dibujar 18 puntos que representen las unidades, separarlos en dos grupos (10 y 8) y dividir cada grupo por 2. A cargo del alumno.

ApAp

ACTIVIDADES

2. Multiplicación y división

6. Completen la tabla pitagórica.

·	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Trac0

7. Reúnanse con un compañero, analicen la tabla pitagórica y resuelvan.

a. Respondan y expliquen las respuestas.

- Si se suman los resultados de las filas del 1 y del 5, ¿se obtienen los valores de la fila del 6?

  Sí, sumando los resultados de la fila del 1 con los de la fila del 5, se obtienen los resultados de la fila del 6.

- Si se suman los resultados de las filas del 4 y del 5, ¿se obtienen los valores de la fila del 6?

  No. Si se suman los resultados de las filas del 4 con los de la fila del 5, se obtienen los valores de la fila del 9.

- Si a los resultados de la filas del 6 se les restan los de la fila del 2, ¿se obtienen los valores de la fila del 3?

  No. Si a los resultados de la fila del 6 se les restan los de la fila del 2, se obtienen los resultados de la fila 4.

- Si se multiplican los resultados de las filas del 2 y del 5, ¿se obtienen los valores de la fila del 7?

  No. Si se multiplican los resultados de las filas del 2 y del 5, en general, se obtienen valores más altos.

- Si se multiplican los resultados de las filas del 2 y del 3, ¿se obtienen los valores de la fila del 6?

  No. Si se multiplican los resultados de las filas del 2 y del 3, en general, se obtienen valores más altos.

b. Completen con la fila del 15. Pueden usar los resultados de la tabla pitagórica.

·	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
15	0	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150

8. Calculen utilizando la tabla pitagórica.

a. 33 : 3 = 11
b. 24 : 2 = 12
c. 48 : 4 = 12
d. 65 : 5 = 13
e. 30 : 2 = 15
f. 45 : 3 = 15
g. 56 : 4 = 14
h. 120 : 5 = 24

2. Multiplicación y división

9. Calculen los siguientes productos utilizando una calculadora, pero sabiendo que la tecla del 8 no funciona. Escriban los cálculos realizados en cada caso.

a. 124 . 8 = Por ejemplo: 124 . 2 . 4 = 992

b. 28 . 15 = Por ejemplo: 7. 4. 15 = 420

c. 184 . 5 = Por ejemplo: 92 . 2. 5 = 920

d. 8 . 32 = Por ejemplo: 2 . 4 . 32 = 256

e. 88 . 8 = Por ejemplo: 44 . 2 . 2. 4 = 704

10. Resuelvan las operaciones teniendo en cuenta el siguiente cálculo.
Indiquen las cuentas realizadas en cada caso. Expliquen la respuesta como en el ejemplo.

15 . 7 = 105

a. *30 . 7 = 15 . 2 . 7 porque 30 = 15 . 2*
= 15 . 7 . 2 por propiedad conmutativa
= 105 . 2 = 210 porque (15 . 7 = 105)

b. 15 . 14 = 15 . 7 . 2 porque 14 = 7 . 2
105 . 2 = 210 porque 15 . 7 = 105

c. 5 . 7 = 105 : 3 = 35
porque 15 . 7 = 105 y 5 es la tercera parte de 15.

d. 5 . 14 = (5 . 7) . 2 = por propiedad disociativa y asociativa
35 . 2 = 70 porque 5 . 7 = 35 (ítem anterior)

e. 45 . 21 = 3 . (15 . 7) . 3 = por propiedad disociativa y asociativa
3 . 105 . 3 = (porque 15 . 7 = 105)
315 . 3 = 945

f. 30 . 14 = 2 . (15 . 7) . 2 = por propiedad disociativa y asociativa
2 . 105 . 2 = porque 15 . 7 = 105
210 . 2 = 420

g. 150 . 70 = 10 . (15 . 7) . 10 = por prop. disoc. y asoc.
10 . 105 . 10 porque 15 . 7 = 105
1 050 . 10 = 10 500

h. 13 . 7 + 2 . 7 = (13 + 2) . 7 = por propiedad distributiva
15 . 7 = 105

i. 105 : 7 = 15 . 7 : 7 = 15 porque 105 = 15 . 7

j. 105 : 15 = 15 . 7 : 15 = 7 porque 105 = 15 . 7

11. Calculen mentalmente los siguientes cálculos utilizando este producto.

5 . 30 = 150

a. 5 . 29 = 5 . 29 = 5 . (30 − 1) = 150 − 5 = 145

b. 5 . 31 = 5 . 31 = 5 . (30 + 1) = 150 + 5 = 155

c. 5 . 15 = 5 . 15 = 5 . (30 : 2) = 150 : 2 = 75

d. 5 . 60 = 5 . 60 = 5 . 30 . 2 = 300

e. 4 . 30 = 4 . 30 = (5 − 1) . 30 = 5 . 30 − 1 . 30 = 150 − 30 = 120

f. 4 . 30 + 30 = 4 . 30 + 30 = (4 + 1) . 30 = 5 . 30 = 150

g. 5 . 29 + 5 = 5 . 29 + 5 = 5 . (29 + 1) = 5 . 30 = 150

h. 3 . 30 + 2 . 30 = 3 . 30 + 2 . 30 = (3 + 2) . 30 = 5 . 30 = 150

2. Multiplicación y división

12. Resuelvan.

a. Completen la tabla.

.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
100	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1 000
1 000	1 000	2 000	3 000	4 000	5 000	6 000	7 000	8 000	9 000	10 000

TracO

b. Reúnanse con un compañero, analicen la tabla anterior y escriban una regla que permita calcular mentalmente multiplicaciones por 10, 100, 1 000, etc.

Para multiplicar un número 10, 100, 1 000, etc., se escribe el mismo número y se le agregan tantos ceros como tiene el 10, 100, 1 000, etc.

13. Marquen con una X los números que son múltiplos de 10.

a. 1 240 [X]

b. 357 800 [X]

c. 255 [ ]

d. 350 [X]

e. 35 000 [X]

f. 1 505 [ ]

14. Resuelvan mentalmente aplicando propiedades de la multiplicación. Expliquen cómo pensaron cada caso.

a. 125 . 10 = 1 250

b. 100 . 2 578 = 257 800

c. 5 347 . 5 . 2 = 5 347 . 10 = 53 470 (propiedad asociativa)

d. 21 . 200 = 21 . 2 . 100 = 42 . 100 = 4 200 (prop. disoc y asoc.)

15. Completen con una multiplicación o división que contenga un múltiplo de 10.

Operación	Resultado
150 . 100 =	15 000
6 . 30 =	180
210 : 10 =	21
2 400 : 100 =	24
27 . 200 =	5 400
36 . 100 =	3 600
2 000 : 10 . 2 =	400

TracO

16. Reúnanse con un compañero y escriban una regla que permita calcular mentalmente divisiones por múltiplos de 10, 100, 1 000, etc.

Al dividir un número por 10, 100, 1 000 etc., hay que quitarle al número tantos ceros como tenga el múltiplo por el cual se lo dividió.

3. Potenciación y radicación

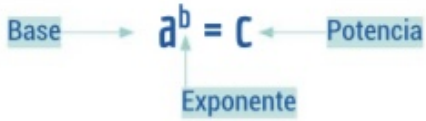
▶ SABERES DINÁMICOS

Potenciación

La **potenciación** es una operación que permite escribir en forma abreviada una multiplicación de factores iguales.

$7^2 = 7 \cdot 7 = 49$ Se lee: *"siete elevado al cuadrado"*.

$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ Se lee: *"cuatro elevado al cubo"*.



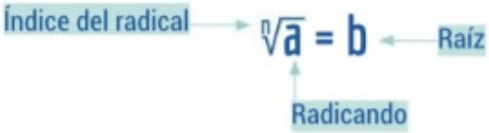
Áreas dinámicas [Matemática y Ciencias Naturales]

La bipartición es una manera de reproducción que se lleva a cabo en bacterias. Consiste en la duplicación del ADN, seguida de la división del citoplasma, que da lugar a dos células hijas. Por ejemplo: 1 bacteria se divide en 2, luego cada una de ellas en otras 2 y ya tenemos $2 \cdot 2 = 2^2 = 4$; luego, cada una de ellas se divide en otras 2 y tenemos 8 ($2^2 \cdot 2 = 2^3$), etc. Es decir, la cantidad de bacterias se puede expresar como una potencia de 2. La bacteria *Escherichia coli* se puede dividir una vez cada 20 minutos.

Propiedades de la potenciación	Ejemplos
• Para **multiplicar dos potencias de igual base**, se escribe la misma base y se suman los exponentes.	$3^2 \cdot 3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^{2+3} = 3^5$
• Para **dividir dos potencias de igual base**, se escribe la misma base y se restan los exponentes.	$5^4 : 5^2 = (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) : (5 \cdot 5) = 5^{4-2} = 5^2$
• Para calcular la **potencia de otra potencia**, se escribe la misma base y se multiplican los exponentes.	$(7^3)^2 = (7 \cdot 7 \cdot 7)^2 = (7 \cdot 7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7 \cdot 7) = 7^{3.2} = 7^6$
• La potenciación es **distributiva** con respecto a la multiplicación y a la división.	$(4 \cdot 3)^2 = 4^2 \cdot 3^2$ $(10 : 5)^3 = 10^3 : 5^3$

Radicación

La **radicación** es la operación inversa de la potenciación.



$\sqrt{81} = 9$, porque $9^2 = 81$ Se lee *"la raíz cuadrada de 81 es 9"*.

$\sqrt[3]{27} = 3$, porque $3^3 = 27$ Se lee *"la raíz cúbica de 27 es 3"*.

La radicación es distributiva con respecto a la multiplicación y a la división.

$\sqrt{25 \cdot 4} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{4}$ Entonces... $\sqrt{25} \cdot \sqrt{4} = \sqrt{25 \cdot 4}$

$\sqrt{16 : 4} = \sqrt{16} : \sqrt{4}$ $\sqrt{16} : \sqrt{4} = \sqrt{16 : 4}$

Esta propiedad sirve para decidir cómo conviene resolver algunos casos.

$\sqrt{16 \cdot 36} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{36} = 4 \cdot 6 = 24$ No fue necesario hacer la multiplicación "16 . 36".

$\sqrt{200} : \sqrt{2} = \sqrt{200 : 2} = \sqrt{100} = 10$ No se puede resolver sin aplicar la propiedad.

TEST DE COMPRENSIÓN

ApAp

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. ¿Cuál es el resultado de $2^{15} : 2^{13}$? $2^2 = 4$
   b. Es cierto que si $(2^3)^a = 2^{12}$, ¿el valor de "a" es 9? No, a = 4.
   c. ¿Cuál es el resultado de $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$?
   $\sqrt{16} = 4$.
   d. Observen el ejemplo de la propiedad que dice que "para multiplicar dos potencias de igual base, se escribe la misma base y se suman los exponentes" y escriban otro ejemplo de esa propiedad.
   Por ejemplo, $4^3 \cdot 4^2 = 4^5$

ACTIVIDADES

3. Potenciación y radicación

17. Escriban el desarrollo de cada potencia y resuelvan.

a. $3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$

b. $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$

c. $10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,000$

d. $0^7 = 0$

e. $1^8 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

f. $2^3 \cdot 3^2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 8 \cdot 9 = 72$

g. $3^5 \cdot 3 : 3^2 = (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) : (3 \cdot 3) = 729 : 9 = 81$

h. $(2^3)^2 = 2^3 \cdot 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$

18. Escriban V (verdadero) o F (falso), según corresponda.

a. $2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ — V

b. $3^4 = 3 + 3 + 3 + 3$ — F

c. $(3^2)^3 = (3^3)^2$ — V

d. $4^3 = 3^4$ — F

e. $1 = 3^5 : 3^5$ — V

f. $1^{20} = 1$ — V

g. $(3 + 5)^2 = 3^2 + 5^2$ — F

h. $(10 : 2)^3 = 10^3 : 2^3$ — V

i. $2^4 \cdot 2^3 = 2^7$ — V

j. $4^3 \cdot 4^2 = (2^2)^5$ — V

19. Lean atentamente y resuelvan.

a. Completen la siguiente tabla.

a^4	a^3	a^2	a
16	8	4	2

b. Calculen utilizando los valores de la tabla y las propiedades de la potenciación. Para cada caso, escriban un cálculo según la propiedad utilizada. Tengan en cuenta el ejemplo.

- $a^5 = a^3 \cdot a^2 = 8 \cdot 4 = 32$
- $a^7 = a^3 \cdot a^4 = 8 \cdot 16 = 128$
- $a^6 = a^3 \cdot a^3 = 8 \cdot 8 = 64$
- $a^0 = 2^0 = 1$

20. Completen con los números que faltan.

a. $\sqrt{144} = 12$, porque $12^2 = 144$

b. $\sqrt[3]{27} = 3$, porque $3^3 = 27$

c. $\sqrt[5]{32} = 2$, porque $2^5 = 32$

d. $\sqrt{100} = 10$, porque $10^2 = 100$

21. Resuelvan aplicando propiedades, cuando sea posible.

a. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{50} = \sqrt{100} = 10$

b. $\sqrt{4} + \sqrt{25} = 2 + 5 = 7$

c. $\sqrt{2} \cdot 2^3 = \sqrt{2^4} = \sqrt{16} = 4$

d. $\sqrt[3]{27 \cdot 8 \cdot 1\,000} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{1\,000} = 3 \cdot 2 \cdot 10 = 60$

22. Lean atentamente y resuelvan.

Julia mandó un Whats App a dos amigas. Cada una de ellas lo reenvió a otros dos contactos que a su vez lo reenviaron a otros dos.

a. ¿Cuántas personas recibieron el mensaje de Julia? El mensaje de Julia lo recibieron 14 personas.

b. Expresen este resultado como suma de potencias de 2. $2 + 2^2 + 2^3$.

4. Operaciones combinadas

▶ SABERES DINÁMICOS

• Para **resolver una operación combinando todas las operaciones**, se pueden seguir estos pasos.

$4 \cdot 3^2 + \sqrt{25} : 5 - 2 \cdot 3 + 5^2 \cdot 5^4 : 5^5 =$ **1.** Se separa en términos.

$4 \cdot 9 + 5 : 5 - 2 \cdot 3 + 5 =$ **2.** Se resuelven las potencias y las raíces (aplicando las propiedades).

$36 + 1 - 6 + 5 =$ **3.** Se resuelven las multiplicaciones y las divisiones.

$42 - 6 =$ **4.** Se resuelven las sumas y las restas.

$= 36$

• Para **resolver una operación combinada donde aparecen paréntesis**, se pueden seguir los siguientes pasos.

$(2 \cdot 3^2 + \sqrt{49}) : 5 + (6 - 2^4 : 2^2) \cdot 3 =$ **1.** Se separa en términos.

$(2 \cdot 9 + 7) : 5 + (6 - 4) \cdot 3 =$ **2.** Se resuelven las operaciones encerradas en los paréntesis (separando en términos).

$25 : 5 + 2 \cdot 3 =$

$5 + 6 =$ **3.** Se resuelve respetando la jerarquía de las operaciones.

$= 11$

• El siguiente es un problema que se puede plantear con un cálculo combinado.

Luis está armando un rompecabezas de 100 piezas. Ya ubicó 16 de ellas y quiere calcular cuánto tardará en terminarlo si coloca 3 piezas por hora.

a. ¿Cuántas horas necesita para terminar el rompecabezas con el ritmo estimado?

(100 – 16) : 3 = 28

Respuesta: si coloca 3 piezas por hora, necesita 28 horas para terminar el rompecabezas.

Al total de 100 piezas, se le restan las 16 piezas ya ubicadas y se reparten en grupos de 3 piezas (las que piensa ubicar cada hora) para obtener la cantidad de horas que necesita.

b. ¿Cuántas piezas tendrá ubicadas luego de 4 horas?

16 + 3 . 4 = 28

Respuesta: tendrá ubicadas 28 piezas.

A las 16 piezas ubicadas, se le suma la cantidad de piezas que se colocan en 4 horas (3 piezas por 4 horas).

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen la respuesta.
   a. ¿Cuál es el resultado de $25 - 2 \cdot 7$? $25 - 2 \cdot 7 = 25 - 14 = 11$
   b. ¿Cuál es el resultado de $(3 + 2 \cdot 4)^2$? $(3 + 2 \cdot 4)^2 = (3 + 8)^2 = 11^2 = 121$
   c. ¿Es cierto que $\sqrt{(5 \cdot (8 + 2) - 1)} = \sqrt{(5 \cdot 8 + 5 \cdot 2 - 5 \cdot 1)}$? No. $\sqrt{5(8+2)-1} = \sqrt{49} = 7$ y $\sqrt{(5.8+5.2-5.1)} = \sqrt{45}$

ApAp

ACTIVIDADES

4. Operaciones combinadas

23. Resuelvan los siguientes cálculos combinados.

a. $(\sqrt{81} : 3)^2 + 3 \cdot 2^3 =$

$(9 : 3)^2 + 3 \cdot 8 =$

$3^2 + 24 =$

$9 + 24 = 33$

b. $(3^0 + \sqrt{4^2} : 2) \cdot 5 + 1^7 =$

$(1 + 4 : 2) \cdot 5 + 1 =$

$(1 + 2) \cdot 5 + 1 =$

$3 \cdot 5 + 1 = 16$

c. $(5 \cdot 2 - 3) : \sqrt{49} + 2^5 : 2^3 =$

$(10 - 3) : 7 + 2^2 =$

$7 : 7 + 4 =$

$1 + 4 = 5$

d. $(\sqrt{50 : 2}) + 1) \cdot (3^2 - 3 \cdot 2) =$

$(\sqrt{25} + 1) \cdot (9 - 6) =$

$(5 + 1) \cdot 3 =$

$6 \cdot 3 = 18$

e. $(10 - 2 \cdot 3)^2 : (2^0 + 3) + \sqrt[3]{125}) =$

$(10 - 6)^2 : (1 + 3) + 5 =$

$4^2 : 4 + 5 =$

$4 + 5 = 9$

f. $[(5 \cdot 4 - 5) : \sqrt[3]{27}) + 3]^2 =$

$[(15 : 3) + 3]^2 =$

$(5 + 3)^2 =$

$8^2 = 64$

24. Resuelvan aplicando propiedades de la potenciación y de la radicación, cuando sea posible.

a. $7^{20} : 7^{19} + 7^0 =$

$7^{20-19} + 1 = 7 + 1 = 8$

b. $\sqrt{50} : \sqrt{2} + 2^3 \cdot 2 =$

$\sqrt{50 : 2} + 2^{3+1} = \sqrt{25} + 2^4 = 5 + 16 = 21$

c. $(3^2)^3 : 3^5 + \sqrt{100 \cdot 49} =$

$3^{2 \cdot 3} : 3^5 + \sqrt{100} \cdot \sqrt{49} = 3^{6-5} + 10 \cdot 7 = 3 + 70 = 73$

d. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{32} + (8 - 3)^2 : (250 : 10) =$

$\sqrt{2 \cdot 32} + 5^2 : 25 = \sqrt{64} + 25 : 25 = 8 + 1 = 9$

e. $\sqrt{10 \cdot (8 - 2) + 4} =$

$\sqrt{10 \cdot 6 + 4} = \sqrt{60 + 4} = \sqrt{64} = 8$

f. $(3 \cdot \sqrt{2} - \sqrt{2}) \cdot \sqrt{2} =$

$3 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 3 \cdot \sqrt{2 \cdot 2} - \sqrt{2 \cdot 2} = 3 \cdot 2 - 2 = 6 - 2 = 4$

25. Completen con = o ≠, según corresponda. Expliquen las respuestas.

a.	$(5 \cdot 2)^3$	=	$5^3 \cdot 2^3$	d.	$\sqrt{1\,000 : 25}$	=	$\sqrt{1\,000} : \sqrt{25}$
b.	$\sqrt{100 + 81}$	≠	$\sqrt{100} + \sqrt{81}$	e.	$3^4 \cdot 3 : 3^5$	=	$2^4 : (2^2)^2$
c.	$(5 \cdot 2^3)^4$	≠	$5^4 \cdot 2^7$	f.	$\sqrt{\sqrt{16}}$	=	$\sqrt[6]{64}$

4. Operaciones combinadas

26. Completen con los números que faltan.

a. $\sqrt{25} + \boxed{\sqrt{9}} = \boxed{5} + 3$ b. $(5 \cdot 4)^{\boxed{2}} = 25 \cdot \boxed{16}$ c. $\boxed{3} \cdot 3^4 = 243$ d. $\sqrt{625} - \sqrt{50} : \boxed{\sqrt{2}} = 20$

27. Escriban el cálculo y resuelvan.

a. El doble del cuadrado de 10.

$2 \cdot 10^2 = 2 \cdot 100 = 200$

b. La suma entre el cuadrado de 5 y el cubo de 3.

$5^2 + 3^3 = 25 + 27 = 52$

c. El cuadrado de la resta entre el cubo de 2 y la raíz cuadrada de 16.

$(2^3 - \sqrt{16})^2 = (8 - 4)^2 = 4^2 = 16$

d. La raíz cuadrada del producto entre el cuadrado de 5 y la raíz cúbica de 64.

$\sqrt{5^2 \cdot \sqrt[3]{64}} = \sqrt{25 \cdot 4} = \sqrt{100} = 10$

e. El producto entre el cubo de 1 y la raíz quinta de 32.

$1^3 \cdot \sqrt[5]{32} = 1 \cdot 2 = 2$

f. La diferencia entre el cubo de 4 y el triple de la raíz cuadrada de 64.

$4^3 - 3 \cdot \sqrt{64} = 64 - 3 \cdot 8 = 64 - 24 = 40$

28. Marquen con una X el cálculo que corresponda a cada situación y resuelvan.

a. El doble de la suma entre los cuadrados de 3 y de 5.

- $2 \cdot (3 + 5)^2$ ☐
- $2 \cdot 3^2 + 5^2$ ☐
- $(3^2 + 5^2) \cdot 2$ X

b. La raíz quinta de la diferencia entre el cuadrado de 8 y 32.

- $\sqrt[5]{8^2 - 32}$ X
- $\sqrt[5]{8^2} - \sqrt[5]{32^2}$ ☐
- $\sqrt[5]{8^2} - 32$ ☐

4. Operaciones combinadas

TracO

29. Lean atentamente y resuelvan con un compañero.

a. Luis y María realizaron un entrenamiento que consistía en correr 5 tramos de la misma distancia descansando 30 segundos entre cada uno. Si en los últimos 3 tramos recorrieron 3 000 m, ¿cuánto corrieron en total?

Cada tramo son 1 000 m. En total corrieron 5 000 m.

b. Elena realizó un paseo con su bicicleta que tiene un velocímetro que le indica la distancia que recorre y la velocidad media del trayecto. En los primeros 10 minutos Elena hizo 4 km. Se tomó un descanso y anduvo 5 minutos más, donde recorrió otros 2 km. ¿Cuándo fue mayor la velocidad de Elena: en los primeros 10 minutos o en los 5 minutos finales? ¿Por qué?

La velocidad de Elena fue la misma en los dos tramos, porque la relación es proporcional, es decir, 4/10 = 2/5.

c. En cada partido de un torneo se pueden obtener 1, 2 o 3 puntos. Un equipo jugó contra A, B, C y D y obtuvo 9 puntos. ¿De cuántas maneras distintas pudo hacerlo?

A3-B3-C2-D1; A3-B3-C1-D2; A3-B2-C3-D1; A3-B1-C3-D2; A3-B2-C1-D3; A3-B1-C2-D3; A2-B3-C3-D1; A1-B3-C3-D2; A2-B3-C1-D3; A1-B3-C2-D3; A2-B1-C3-D3; A1-B2-C3-D3. Pudo hacerlo de 12 maneras diferentes.

d. Juan debe llenar una piscina que tiene una capacidad de 8 000 litros. La piscina ya tiene 2 000 litros y Juan abre una exclusa que vierte 120 litros de agua por minuto.

- ¿Cuántos litros de agua habrá en la piscina luego de 10 minutos?

$10 \cdot 120 + 2\,000 = 1\,200 + 2\,000 = 3\,200$

Luego de 10 minutos en la piscina habrá 3 200 litros.

- A los 20 minutos, ¿cuántos litros de agua faltarán para llenar la piscina?

$8\,000 - (20 \cdot 120 + 2\,000) = 8\,000 - (2\,400 + 2\,000) = 8\,000 - 4\,400 = 3\,600$

A los 20 minutos faltarán 3 600 litros para llenarla.

- ¿Cuánto tiempo tardará en llenarse la piscina?

$x \cdot 120 + 2\,000 = 8\,000 \rightarrow x \cdot 120 = 8\,000 - 2\,000 \rightarrow x = 6\,000 : 120 \rightarrow x = 50$

La piscina tardará en llenarse 50 minutos.

DinámicaMente

Observen la siguiente relación teniendo en cuenta que ZOO y TOPAZ son números naturales en donde a cada letra le corresponde una cifra entre 0 y 9. Si ZOO^2 = TOPAZ, ¿cuál es la cifra que le corresponde a cada letra?

A = 0 O = 9 P = 6 T = 3 Z = 1

30. Descompongan según las potencias de 10 los siguientes números.

a. 34 527 = $3 . 10^4 + 4 . 10^3 + 5 . 10^2 + 2 . 10 + 7 . 10^0$

b. 10 508 = $1 . 10^4 + 5 . 10^2 + 8 . 10^0$

c. 132 000 = $1 . 10^5 + 3 . 10^4 + 2 . 10^3$

d. 5 748 = $5 . 10^3 + 7 . 10^2 + 4 . 10 + 8 . 10^0$

e. 21 037 = $2 . 10^4 + 1 . 10^3 + 3 . 10 + 7 . 10^0$

f. 4 006 030 = $4 . 10^6 + 6 . 10^3 + 3 . 10$

31. Escriban el número que se forma en cada caso.

a. 5 decenas de mil, 3 centenas, 4 decenas y 8 unidades. 50 348

b. 8 centenas de mil, 5 centenas, 3 unidades y 4 unidades de mil. 804 503

c. 3 centenas de mil, 9 unidades, 5 decenas de mil y 2 centenas. 350 209

32. Descompongan cada número de la forma solicitada en cada caso.

a. 500 002 en forma aditiva.
500 000 + 2

b. 2 790 520 en forma multiplicativa.
2 . 1 000 000 + 7 . 100 000 + 9 . 10 000 + 5 . 100 + 2 . 10

c. 8 404 488 en forma aditiva.
8 000 000 + 400 000 + 4 000 + 400 + 80 + 8

d. 30 050 305 en forma multiplicativa.
3 . 10 000 000 +5 . 10 000 + 3 . 100 + 5

33. Indiquen en cada caso a qué tipo de descomposición corresponde y recompongan el número.

a. 1 . 10 000 + 5 . 1 000 + 3 . 10 + 8 =
Multiplicativa; 15 038.

b. 500 + 20 000 + 70 + 9 =
Aditiva; 20 579.

c. 4 . 10^3 + 7 + 8 . 10 =
En potencias de 10; 4 087.

34. Resuelvan teniendo en cuenta el siguiente cálculo.

49 . 15 = 735

a. 49 . 30 = 735 . 2 = 1 470

b. 7 . 15 = 735 : 7 = 105

c. 490 . 15 = 735 . 10 = 7 350

d. 49 . 1 500 = 735 . 100 = 73 500

e. 49 . 150 = 735 . 10 = 7 350

f. 49 . 60 = 735 . 4 = 2 940

35. Respondan utilizando la tabla pitagórica de la página 8.

a. ¿En qué fila y columna aparece el 18? Escriban todos los casos.
F2-C9; F3-C6; F6-C3; F9-C2.

b. ¿Es cierto que los valores de la fila del 2 son iguales a los de la columna del 2? ¿Qué propiedad de la multiplicación se cumple?
Sí, se cumple por propiedad conmutativa de la multiplicación.

c. ¿Cómo se pueden obtener los resultados de la fila del 6 usando los de la fila del 8 y los de la columna del 2?
Se deben restar los resultados de la fila del 2 a los de la fila del 8.

d. ¿Cómo se pueden obtener los resultados de la columna del 10 usando los de la columna del 1?
Multiplicando por 10 a cada uno de los resultados de la fila del 1.

36. Resuelvan de dos maneras distintas.

a. (12 + 13) . 5 = 25 . 5 = 125 o 12 . 5 + 13 . 5 = 125

b. 7 . (9 − 4) = 7 . 5 = 35 o 7 . 9 − 7 . 4 = 35

c. 5 . 3 + 4 . 3 = 15 + 12 = 27 o (5 + 4) . 3 = 9 . 3 = 27

d. (99 + 15) : 3 = 114 : 3 = 38 o 99 : 3 + 15 : 3 = 33 + 5 = 38

e. (8 + 4 − 5) . 6 = 7 . 6 = 42 o 8 . 6 + 4 . 6 − 5 . 6 = 48 + 24 − 30 = 42

f. 15 : 5 − 10 : 5 = 3 − 2 = 1 o (15 − 10) : 5 = 5 : 5 = 1

37. Completen con los números que faltan.

a. 15 . [1 000] = 15 000

b. 3 400 : [100] = 34

c. [27] . 1 000 = 27 000

d. 15 600 : [100] = 156

38. Escriban un par de paréntesis para que el resultado sea el indicado en cada caso.

a. (12 + 36) : 12 = 4

b. 56 : 7 + 6 . (3 − 1) = 20

c. 2 + 8 : (4 − 2) + 5 . 3 = 21

39. Resuelvan.

a. 8 + 2 . 5 − 6 : 3 = 8 + 10 − 2 = 16

b. (8 + 2) . 5 − 6 : 3 = 10 . 5 − 2 = 50 − 2 = 48

c. (8 + 2 . 5 − 6) : 3 = (8 + 10 − 6) : 3 = 12 : 3 = 4

d. [(8 + 2) . 5 − 6] : 4 = (10 . 5 − 6) : 4 = 44 : 4 = 11

40. Resuelvan aplicando las propiedades de la potenciación y de la radicación, cuando sea posible.

a. $(3^5 \cdot 3^4 : 3^7)^2 = (3^{5+4-7})^2 = (3^2)^2 = 3^{2 \cdot 2} = 3^4 = 81$

b. $2 \cdot 2^5 \cdot 2^3 : 2^9 = 2^{1+5+3-9} = 2^0 = 1$

c. $\sqrt[3]{27 \cdot 125 \cdot 1\,000} = 3 \cdot 5 \cdot 10 = 150$

d. $2^4 : 2^3 + 2 \cdot 2^4 = 2^{4-3} + 2^{1+4} = 2 + 2^5 = 2 + 32 = 34$

e. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{32} + (16 - 2^2) : \sqrt{144} = \sqrt{64} + 12 : 12 = 9$

f. $(4 \cdot \sqrt{9} - 2 \cdot \sqrt{9}) \cdot \sqrt{4} = 4\sqrt{36} - 2\sqrt{36} = 12$

g. $(\sqrt{5})^4 \cdot 5^3 : 5^4 = 5^2 \cdot 5^3 : 5^4 = 5^{2+3-4} = 5$

41. Resuelvan.

a. $\sqrt{144} : (11 + 1) + 2 \cdot 3^0 = 12 : 12 + 2 = 1 + 2 = 3$

b. $\sqrt{100} : \sqrt{4} + \sqrt{49} : 7 = 10 : 2 + 7 : 7 = 5 + 1 = 6$

c. $(\sqrt[3]{216} - 2 \cdot 3)^{20} + 11^2 = (6 - 6)^{20} + 121 = 0 + 121 = 121$

d. $(3 \cdot \sqrt{81} - 2 \cdot \sqrt{64} + 5)^2 = (3 \cdot 9 - 2 \cdot 8 + 5)^2 = 16^2 = 256$

e. $\sqrt[3]{125} : \sqrt{25} + 5^2 - 5 = 5 : 5 + 25 - 5 = 1 + 20 = 21$

f. $\sqrt[5]{16} \cdot \sqrt[5]{2} + 3^3 : (5 - 2^2) = 2 + 27 : 1 = 2 + 27 = 29$

42. Escriban el cálculo y resuelvan.

a. El doble del cuadrado de 9. $2 \cdot 9^2 = 2 \cdot 81 = 162$

b. La suma entre la raíz quinta de 32 y el doble de 8. $\sqrt[5]{32} + 2 \cdot 8 = 2 + 16 = 18$

c. El producto entre la raíz cuadrada de 2 y la raíz cuadrada de 50. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{50} = \sqrt{100} = 10$

d. El cuadrado del cubo de 2. $(2^3)^2 = 2^6 = 64$

e. La diferencia entre la raíz cuadrada de 169 y el cubo de 1. $\sqrt{169} - 1^3 = 13 - 1 = 12$

f. La suma entre el cuadrado del doble de 4 y la mitad de 10. $(2 \cdot 4)^2 + 10 : 2 = 8^2 + 5 = 64 + 5 = 69$

43. Completen para obtener la igualdad.

a. $(\boxed{10} + 1)^2 = 121$

b. $3^{\boxed{4}} - 2 = 79$

c. $5^3 \cdot 5 \cdot 5^2 = 5^{\boxed{6}}$

d. $\sqrt[3]{(\boxed{126} - 1)} = 3 \cdot 2 - 1$

44. Lean atentamente cada problema con un compañero. Analícenlos y marquen con una X la respuesta correcta en cada caso. TracO

a. La subida al monte Fuji solo está abierta al público desde el 1 de julio hasta el 27 de agosto de cada año. Alrededor de 200 000 personas suben durante ese período. ¿Cuántas personas suben por día, aproximadamente?

340 ☐ 710 ☐ 3 400 X 7 100 ☐

b. Juan tiene 7 figuritas para regalarle a cinco amigos. Quiere que cada uno reciba al menos 1 figurita y que ninguno reciba más de 2. ¿De cuántas formas puede repartirlas?

20 ☐ 12 ☐ 10 X 5 ☐

c. ¿Cuántos números de 3 cifras hay con la cifra de las decenas igual a la de las unidades?

10 ☐ 81 ☐ 90 X 100 ☐

d. ¿De cuántas maneras se puede obtener un peso de 170 kg, con pesas de 10 kg, 25 kg y 50 kg?

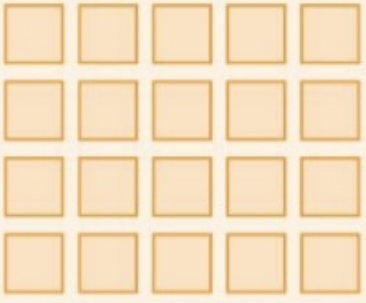
8 ☐ 6 ☐ 10 X 12 ☐

e. ¿Cuál es el último dígito de la suma de los 40 números consecutivos desde el 10 hasta el 49?

9 ☐ 5 ☐ 1 ☐ 0 X

f. Veinte personas están sentadas en 4 filas de 5 asientos cada una, como se observa en el esquema. Cada persona se da un apretón de manos con otra que tiene adelante, con la que tiene atrás y con la que tiene a cada lado. ¿Cuántos apretones de mano se dan en total?

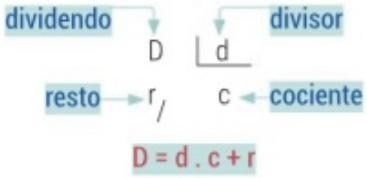
31 X 30 ☐ 15 ☐ 62 ☐



5. Divisibilidad

▶ SABERES DINÁMICOS

Como se explicó en la página 7, en toda división se cumple la siguiente relación.



$$D = d \cdot c + r$$

Cuando r = 0, se dice que D es **divisible** por d, y se puede escribir así.

$$D = d \cdot c$$

También se dice que "D es **múltiplo** de d" o "d es **divisor** de D".

Por ejemplo:

20 es divisible por 5, el cociente es 4 y el resto, 0 ⟶ $20 = 5 \cdot 4$

20 es **múltiplo** de 5 5 es **divisor** de 20

Algunos criterios de divisibilidad

Un número es divisible por:	Ejemplo
2, cuando es par.	*136; 3 708*
3, cuando la suma de sus cifras es un múltiplo de 3.	*213; 5 358*
5, cuando termina en 0 o en 5.	*540; 1 205*
10, cuando termina en 0.	*230; 3 400*

Un número es **primo** cuando tiene solo dos divisores: el 1 y el mismo número.

5 es primo, ya que tiene como divisores al 1 y al 5.

Un número es **compuesto** cuando tiene más de dos divisores.

18 es compuesto porque tiene como divisores al 1, 2, 3, 6, 9 y 18.

Áreas dinámicas [Matemática y Tecnología]

Los números primos tienen una gran importancia en la tecnología. Un ejemplo muy claro es que los números primos de gran tamaño permiten obtener un código muy seguro. Estos códigos se forman con el producto de dos números primos muy grandes, que no es difícil obtener; pero deducir de qué números primos proviene ese número es casi imposible. Este sistema es utilizado por los bancos en los números secretos, las transferencias bancarias y otras operaciones. También se emplean en Internet en la comunicación segura de muchas operaciones.

TEST DE COMPRENSIÓN

ApAp

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. El número 48, ¿es múltiplo de 4? ¿Y de 12? Sí, es múltiplo de 4 y de 12, porque 4 . 12 = 48.
   b. ¿Es posible saber, sin hacer la cuenta, si el resultado de 333 + 1 es múltiplo de 3? Sí, porque el número 333 es múltiplo de 3, entonces 333 + 1 no lo es.
   c. ¿Cuál es el número primo más pequeño?
   El número primo más pequeño es 2.

ACTIVIDADES

5. Divisibilidad

45. Escriban los números que cumplan con las siguientes condiciones.

a. Los divisores de 32. 1, 2, 4, 8, 16 y 32.

b. Los múltiplos pares de 5, menores que 36. 10, 20 y 30.

c. Los múltiplos de 4, mayores que 10 y menores que 45. 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40 y 44.

d. Los divisores de 17. 1 y 17.

e. Los primeros 10 números primos. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 y 31.

46. ¿Cuál es el mayor número de tres cifras, que es múltiplo de 10 y de 18? ¿Y el menor?

El mayor múltiplo de tres cifras es 990 y el menor 90.

47. Sin hacer las cuentas, marquen con una X los números que cumplen la condición.

a. Son divisores de 27.

2		3	X	6		9	X

b. Son divisibles por 5.

5	X	15	X	18		54	

48. Escriban V (verdadero) o F (falso), según corresponda.

a. Si se multiplican dos múltiplos de 3, el resultado es un múltiplo de 9. V

b. La suma entre el doble y el triple del mismo número es un múltiplo de 5. V

c. Si un número es divisible por 3, es siempre divisible por 6. F

d. Si un número es divisible por 6, es siempre divisible por 3. V

e. Todos los múltiplos de 10 también son múltiplos de 5. V

f. Los múltiplos de 2 y de 5 son también múltiplos de 7. F

TracO

49. Trabajen con un compañero y respondan sin hacer las cuentas. Pueden repasar la definición de división.

a. ¿Es cierto que en esta división (534 . 5 + 2) : 5, el resto es 2?

Sí. Porque 534 . 5 es múltiplo de 5, entonces 534 . 5 + 2 tiene resto 2.

b. El resultado de 15 . 17 . 4 + 3, ¿es múltiplo de 3? ¿Y de 5?

Es múltiplo de 3 porque los dos términos son múltiplos de 3, pero no de 5 porque 15 . 17 . 4 es múltiplo de 5 y al sumarle 3, ya no lo es.

c. ¿Cuál es el resultado de la división (3 . 15 + 3) : 3?

Se puede pensar que (3 . 15 + 3) : 3 = (15 + 1) . 3 : 3 = 16 . 3 : 3. El resultado es 16.

6. Factorización

▶ SABERES DINÁMICOS

Un número compuesto se puede descomponer de manera única en factores primos. Esta descomposición se llama **factorización**.

• Para factorear un número se pueden utilizar los siguientes métodos.

Factoricen el número 60.

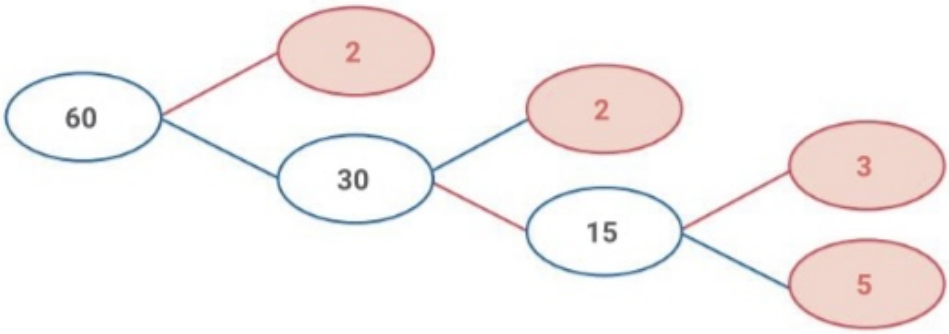
1- Se divide 60 por un número primo (se recomienda empezar por el menor).

El cociente se coloca debajo del 60 y se reitera el procedimiento hasta obtener 1.

60	2
30	2
15	3
5	5
	1

$60 = 2 . 2 . 3 . 5 = 2^2 . 3 . 5$

2- Diagrama de árbol.



$60 = 2 . 2 . 3 . 5 = 2^2 . 3 . 5$

• Para encontrar todos los divisores de un número, se puede realizar el siguiente procedimiento.

$66 = 2 . 3 . 11$ **1.** Se factoriza el número.

$2 . 3 = 6 \quad 2 . 11 = 22 \quad 3 . 11 = 33$ **2.** Se calculan todos los productos posibles.

Divisores de 66: 1; 2; 3; 6; 11; 2; 33; 66 **3.** Se anotan los resultados obtenidos, los factores primos, el 1 y el 66.

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. ¿Es cierto que el factoreo de 45 es 15 . 3? No, el factoreo de 45 es $3^2 . 5 . 1$
   b. ¿A qué número corresponde este factoreo? $2^3 . 3^2 . 5$ $8 . 9 . 5 = 360$

ApAp

   c. Sin hacer la cuenta, indiquen todos los divisores de este número factoreado: $2 . 3^2 . 5$. Los divisores son: 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 18, 30, 45 y 90.

ACTIVIDADES

6. Factorización

50. Factoricen los siguientes números.

a.

90 |

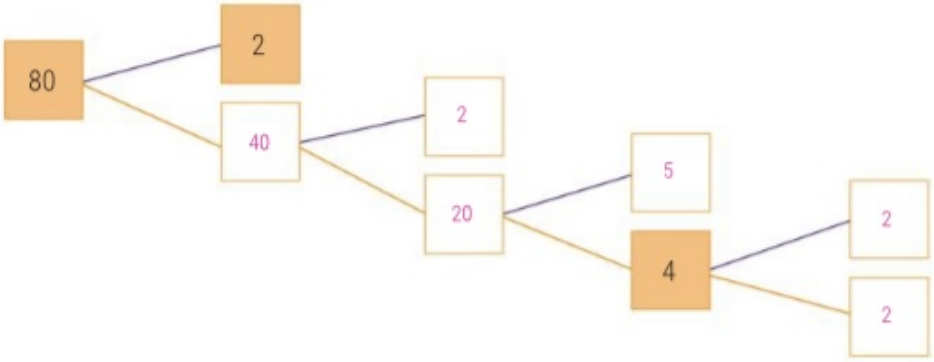
90 = 2 . 3^2 . 5

b.

225 |

225 = 3^2 . 5^2

51. Completen el siguiente diagrama de árbol y factoricen el número.



52. Utilizando un diagrama de árbol, factoricen los números indicados.

a. 315

315 = 3^2 . 7 . 5

b. 441

441 = 3^2 . 7^2

53. Factoricen los siguientes números e indiquen todos sus divisores.

a. 28 = 2^2 . 7 , divisores: 1, 2, 4, 7, 14, 28.

b. 45 = 3^2 . 5 , divisores: 1, 3, 5, 9, 15, 45.

c. 98 = 2 . 7^2 , divisores: 1, 2, 7, 14, 49, 98.

d. 36 = 2^2 . 3^2 , divisores: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.

7. Múltiplo común menor y divisor común mayor

▶ SABERES DINÁMICOS

El **múltiplo común menor** (mcm) entre dos o más números es el menor de los múltiplos que tienen en común esos números, sin tener en cuenta el 0.

• Para encontrar el mcm entre 3 y 4 se pueden buscar:

Algunos múltiplos de 3 son: 3; 6; 9; 12; 15; 18; 21; 24; 27; ... 12 es el menor múltiplo que tienen en común.

Algunos múltiplos de 4 son: 4; 8; 12; 16; 20; 24; 28; ... mcm (3;4) = 12

• Para hallar el mcm (12; 30) se factorean los números y se eligen los factores para obtener el múltiplo común menor.

12	2
6	2
3	3
1	

30	2
15	3
5	5
1	

$12 = 2^2 . 3$

$30 = 2 . 3 . 5$

$12 . 30 = \underbrace{3 . 2^2}_{12} . \overbrace{2 . 3 . 5}^{30}$

mcm (12; 30) = $2^2 . 3 . 5 = 60$

Para calcular el mcm se multiplican los factores comunes y no comunes con su mayor exponente.

• El siguiente problema se puede resolver buscando un múltiplo común menor.

El 1 de abril Julia, María y Ceci visitaron a su amiga Luisa, que se mudó a otra localidad, y decidieron organizar las futuras visitas según sus posibilidades: Julia, cada 6 días; María, cada 8 días y Ceci, cada 12 días.
¿Cuántos días pasarán para que las cuatro se vuelvan a reunir?

Julia concurre a los... 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48 Múltiplos de 6
María concurre a los... 8, 16; 24, 32, 40, 48 Múltiplos de 8
Ceci concurre a los... 12, 24, 48, 72 Múltiplos de 24

Factorizando: $6 = 2 . 3$; $8 = 2^3$; $12 = 2^2 . 3$
$mcm (6; 8; 12) = 2^3 . 3 = 24$
Respuesta: pasarán 24 días.

El mcm entre dos números primos es el resultado de su multiplicación.

$mcm (2; 5) = 2 . 5 = 10$ $mcm (7; 13) = 7 . 13 = 91$

7. Múltiplo común menor y divisor común mayor

El **divisor común mayor** (dcm) entre dos o más números es el mayor de los divisores que tienen en común esos números.

• Para encontrar el dcm entre 24 y 40 se pueden buscar:

Los divisores de 24 son: 1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24 — 8 es el mayor divisor que tienen en común.

Los divisores de 40 son : 1; 2; 4; 5; 8; 10; 20; 40 — dcm (40; 24) = 8

• Para hallar el dcm (12; 30) se factorean los números y se eligen los factores para obtener el divisor común mayor.

12	2
6	2
3	3
1	

30	2
15	3
5	5
1	

$12 = 2 . 2 . 3$

$30 = 2 . 3 . 5$

dcm (12; 30) = 2 . 3 = 6

Para calcular el dcm se multiplican los factores comunes con su menor exponente.

• El siguiente problema se puede resolver buscando un divisor común mayor.

Juan está ordenando su cuarto y encuentra 40 figuritas de fúbol y 16 figuritas de autos de carrera. Colocó en sobres amarillos las de fútbol y en blancos, las de autos. En cada sobre puso la misma cantidad de figuritas. ¿Cuántas figuritas como máximo contiene cada sobre? ¿Cuántos sobres de cada color usó en ese caso?

Los sobres amarillos pueden contener: 1; 2; 4; 5; 8; 10; 20; 40 — Divisores de 40

Los sobres blancos pueden contener: 1; 2; 4; 8; 16 — Divisores de 16

Factorizando: $40 = 2^3 . 5$; $16 = 2^4$; $dcm (40; 16) = 2^3 = 8$

Respuesta 1: puede haber puesto 8 figuritas por sobre.

$40 : 8 = 5$ $\qquad$ $16 : 8 = 2$

Respuesta 2: necesita 5 sobres amarillos y 2 sobres blancos.

Dos números son **coprimos** cuando su único divisor común es 1.

7 y 13 son coprimos.

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. ¿Cuántos divisores comunes tienen el 12 y el 36? El 12 y el 36 tienen 6 divisores en común, 1, 2, 3, 4, 6 y 12.
   b. ¿Cuál es el dcm entre 5 y 7? El dcm entre 5 y 7 es el 1, por ser coprimos.
   c. Completen para que mcm (24; __) = 24. Indiquen todos los valores posibles. Los valores posibles son: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 y 24.

ApAp

ACTIVIDADES

7. Múltiplo común menor y divisor común mayor

54. Calculen sin factorear el mcm y el dcm de los siguientes números.

a. 2; 7; 9.

Múltiplos de 2: ... 114, 116, 118, 120, 122, 124, 126, 128, 130,...

Divisores de 2: 1, 2

Múltiplos de 7: ... 63, 70, 77, 84, 91, 98, 105, 112, 119, 126, 133,...

Divisores de 7: 1, 7

Múltiplos de 9: ... 63, 72, 81, 90, 99, 108, 117, 126, 135, 144,...

Divisores de 9: 1, 3, 9

mcm (2; 7; 9) = 126

dcm (2; 7; 9) = 1

b. 9; 36; 72.

Múltiplos de 9: 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90,...

Divisores de 9: 1, 3, 9

Múltiplos de 36: 36, 72, 108, 144,...

Divisores de 36: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36

Múltiplos de 72: 72, 144, 216, 288,...

Divisores de 72: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72

mcm (9; 36; 72) = 72

dcm (9; 36; 72) = 9

c. 15; 20; 30.

Múltiplos de 15: 15, 30, 45, 60, 75, 90,...

Divisores de 15: 1, 3, 5, 15

Múltiplos de 20: 20, 30, 40, 50, 60, 70,...

Divisores de 20: 1, 2, 4, 5, 10, 20

Múltiplos de 30: 30, 60, 90, 120, 150, 180,...

Divisores de 30: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30

mcm (15; 20; 30) = 60

dcm (15; 20; 30) = 5

55. Calculen el mcm y el dcm de los siguientes números factorizándolos.

a. 28; 98

mcm (28; 98) = 196

dcm (28; 98) = 14

b. 12; 30

mcm (12; 30) = 60

dcm (12; 30) = 6

c. 12; 16; 18

mcm (12; 16; 18) = 144

dcm (12; 16; 18) = 6

d. 24; 30; 56

mcm (24; 30; 56) = 840

dcm (24; 30; 56) = 2

56. Escriban lo pedido en cada caso.

a. Dos números coprimos menores que 13 y mayores que 5. Por ejemplo, 7 y 11; 6 y 7; 7 y 8; 8 y 9; 8 y 11.

b. Dos números cuyo mcm sea el producto entre ambos. Por ejemplo, 3 y 7. Cualquier par de números coprimos.

c. Dos números cuyo mcm sea $3^2 \cdot 5$. Por ejemplo, 9 y 5.

d. Dos números cuyo dcm sea $3^2 \cdot 5$. Por ejemplo, 90 y 45.

7. Múltiplo común menor y divisor común mayor

Trac0

57. Reúnanse con un compañero, lean atentamente y resuelvan. Trac0

a. Indiquen tres valores posibles de x para que mcm (x; 16) = 48.

Por ejemplo, 3, 24 y 48.

b. Indiquen tres valores posibles de x para que dcm (8; x) = 8.

Por ejemplo, 16, 24 y 32.

c. Ana compró 120 caramelos, 60 chocolates y 90 chupetines para su cumpleaños. Los quiere repartir en bolsitas con igual cantidad de golosinas. ¿Cuál es la mayor cantidad de bolsitas con el mismo contenido que puede armar? ¿Cuántas golosinas de cada tipo contiene cada bolsita?

dcm (120; 60; 90) = 30. Ana puede armar 30 bolsitas con el mismo contenido: 4 caramelos, 2 chocolates y 3 chupetines.

d. Una agencia de turismo ofrece tres tipos de viajes por Europa: uno dura 10 días, otro dura 16 días y el tercero, 20 días (cuando termina cada viaje, comienza otro del mismo tipo). Si los tres viajes comienzan el mismo día, ¿cuántos días pasarán para que vuelvan a partir al mismo tiempo?

mcm (10; 16; 20) = 80. Pasarán 80 días para que vuelvan a partir al mismo tiempo.

e. José compró una cantidad de lápices para distribuir entre sus alumnos. Puede armar grupos de 5, de 6 o de 9 y no sobra ninguno. Si son más de 300 y menos de 400, ¿cuántos lápices compró?

mcm (5; 6; 9) = 90. Como debe ser mayor de 300, se buscan otros múltiplos comunes: 180, 270, 360,... José compró 360 lápices.

f. En un juego virtual dos autos compiten en una pista circular. Uno tarda 12 segundos en dar la vuelta a la pista y el otro, 15 segundos. Si largan juntos, ¿cuántos segundos pasarán hasta que crucen juntos la línea de salida? ¿Cuántas vueltas habrá dado cada uno en ese tiempo?

mcm (12; 15) = 60. Pasarán 60 segundos hasta que se crucen. Habrán dado 5 y 4 vueltas respectivamente.

8. Lenguaje simbólico. Ecuaciones

▶ SABERES DINÁMICOS

El lenguaje de las palabras, que puede ser oral o escrito, se denomina **lenguaje coloquial**. La matemática utiliza un lenguaje particular denominado **lenguaje simbólico**.

Lenguaje coloquial	Lenguaje simbólico
El doble de un número	$2 . x$
El anterior de un número	$a - 1$
La diferencia entre dos números	$a - b$
La suma entre el triple de un número y dos	$3 . c + 2$

Si entre un número y la letra no se indica operación, se entiende que hay un signo de multiplicar.

$$5 . x = 5x$$

Una **ecuación** es una igualdad en la que hay, por lo menos, un valor desconocido llamado **incógnita**.

$$\underbrace{3x + 4}_{\text{1.º miembro}} = \underbrace{2x - 1}_{\text{2.º miembro}}$$

Resolver una ecuación significa encontrar el valor o los valores de la incógnita que hacen verdadera la igualdad. Cada valor de la incógnita es una **solución** de la ecuación.

Para resolver una ecuación, se deben obtener **ecuaciones equivalentes**, es decir, con la misma solución, teniendo en cuenta las siguientes **propiedades**.

- Se suma o resta un mismo número a ambos miembros de la igualdad.
- Se multiplica o divide por un mismo número (distinto de cero) a ambos miembros de la igualdad.
- Se aplica una potencia o raíz a ambos miembros de la igualdad.

$$x + 8 = 14$$
$$x + 8 - 8 = 14 - 8$$
$$x = 6$$

$$2x = 16$$
$$2x : 2 = 16 : 2$$
$$x = 8$$

$$x^5 = 32$$
$$\sqrt[5]{x^5} = \sqrt[5]{32}$$
$$x = 2$$

$$x - 2 = 5$$
$$x - 2 + 2 = 5 + 2$$
$$x = 7$$

$$x : 3 = 21$$
$$x : 3 . 3 = 21 . 3$$
$$x = 63$$

$$\sqrt[3]{x} = 5$$
$$(\sqrt[3]{x})^3 = 5^3$$
$$x = 125$$

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. ¿Cómo se expresa en lenguaje simbólico la suma de dos números consecutivos? $x + (x + 1)$, o bien $2x + 1$.
   b. ¿Cómo se traduce al lenguaje coloquial $2 . (x - 1)$? El doble del anterior de un número.
   c. Utilizando el lenguaje simbólico, demuestren que la suma de tres números consecutivos es siempre un múltiplo de 3.
   $x + x + 1 + x + 2 = 3x + 3 = 3 . (x + 1)$. Por lo tanto, es múltiplo de 3.

ApAp

ACTIVIDADES

8. Lenguaje simbólico. Ecuaciones

58. Completen la tabla según corresponda.

Lenguaje coloquial	Lenguaje simbólico
El doble de un número.	2x
El triple de un número.	3x
La mitad de un número.	x : 2
La tercera parte de un número.	x : 3
El anterior de un número.	x − 1
El siguiente de un número.	x + 1
La suma entre dos números.	x + y
La diferencia entre dos números.	x − y
El producto entre dos números.	x . y
El cociente entre dos números.	x : y
La suma entre un número y su siguiente.	x + (x + 1)
La diferencia entre un número y su anterior.	x − (x − 1)
El siguiente del doble de un número.	2x + 1
El anterior del doble de un número.	2x − 1
El cuadrado de la suma entre dos números.	$(x + y)^2$

59. Marquen con una X, si x = 4 es solución de las siguientes ecuaciones.

a. $2x - 1 = 7$ [X]

Verificación: $2 . 4 - 1 = 8 - 1 = 7$

b. $x^2 - 5 = 3$ [ ]

Verificación: $4^2 - 5 = 16 - 5 = 11$

c. $(4x - 2) : 2 = \sqrt{49}$ [X]

Verificación: $(4 . 4 - 2) : 2 = 7$

$(16 - 2) : 2 = 7$

$14 : 2 = 7$

d. $8 : (1 + 3) - 1 = x - 3$ [X]

Verificación: $8 : (1 + 3) - 1 = 4 - 3$

$8 : 4 - 1 = 1$

$2 - 1 = 1$

8. Lenguaje simbólico. Ecuaciones

60. Resuelvan las siguientes ecuaciones y verifiquen la solución.

a. $x + 9 = 15$

$x = 15 - 9$

$x = 6$

b. $x - 5 = 13$

$x = 13 + 5$

$x = 18$

c. $7 = x - 3$

$7 + 3 = x$

$x = 10$

d. $2x - 1 = 7$

$2x = 7 + 1$

$x = 8 : 2 \rightarrow x = 4$

e. $x^3 - 1 = 7$

$x^3 = 7 + 1$

$x = \sqrt[3]{8} \rightarrow x = 2$

f. $(x + 1) . 3 = 6$

$x + 1 = 6 : 3$

$x = 2 - 1 \rightarrow x = 1$

g. $11 = 4x - 1$

$11 + 1 = 4x$

$12 : 4 = x \rightarrow x = 3$

h. $\sqrt{x} + 3 = 8$

$\sqrt{x} = 8 - 3$

$x = 5^2 \rightarrow x = 25$

i. $(x + 3) . 2 - 1 = x + 7$

$2x + 6 - 1 = x + 7$

$2x - x = 7 - 5 \rightarrow x = 2$

j. $(x - 3)^2 - 1 = 15$

$(x - 3)^2 = 15 + 1 \rightarrow x - 3 = \sqrt{16}$

$x = 4 + 3 \rightarrow x = 7$

61. Resuelvan de dos maneras distintas.

	Aplicando la propiedad distributiva	Sin aplicar la propiedad distributiva
a. $(x + 1) . 3 = 36$	$3x + 3 = 36$ $3x = 36 - 3$ $x = 33 : 3$ $x = 11$	$x + 1 = 36 : 3$ $x = 12 - 1$ $x = 11$
b. $(2x - 5) : 3 = 9$	No es posible por no ser múltiplos de 3 los números del dividendo.	$2x - 5 = 9 . 3$ $2x = 27 + 5$ $x = 32 : 2$ $x = 16$
c. $2 . (x - 7) + 1 = 13$	$2x - 14 + 1 = 13$ $2x = 13 + 14 - 1$ $x = 26 : 2$ $x = 13$	$2 . (x - 7) = 13 - 1$ $x - 7 = 12 : 2$ $x = 6 + 7$ $x = 13$
d. $30 - 14 = (6x + 2x - 8) : 2$	$16 = (8x - 8) : 2$ $16 = 4x - 4$ $16 + 4 = 4x$ $20 : 4 = x$ $5 = x$	$16 = (8x - 8) : 2$ $16 . 2 = 8x - 8$ $32 + 8 = 8x$ $40 : 8 = x$ $5 = x$

8. Lenguaje simbólico. Ecuaciones

Trac0

62. **Reúnanse en grupos, expresen en lenguaje simbólico y encuentren el o los números pedidos.**

a. La suma de dos números consecutivos es 597.

$x + x + 1 = 597 \rightarrow 2x + 1 = 597 \rightarrow 2x = 597 - 1 \rightarrow x = 596 : 2 \rightarrow x = 298$.

Los números son 298 y 299.

b. La diferencia entre el cuadrado de un número y tres es 97.

$x^2 - 3 = 97 \rightarrow x^2 = 97 + 3 \rightarrow x = \sqrt{100} \rightarrow x = 10$.

El número es 10.

c. La raíz cuadrada del triple de un número es 6.

$\sqrt{3x} = 6 \rightarrow 3x = 6^2 \rightarrow x = 36 : 3 \rightarrow x = 12$.

El número es 12.

d. Luis tiene una colección de 85 monedas provenientes de países de Europa, América y África. La cantidad de monedas europeas es el doble de las americanas y las africanas son 5 más que las americanas. ¿Cuántas monedas de cada tipo tiene?

E: Europa; A: América; F: África $\rightarrow E + A + F = 85 \rightarrow 2A + A + A + 5 = 85 \rightarrow$

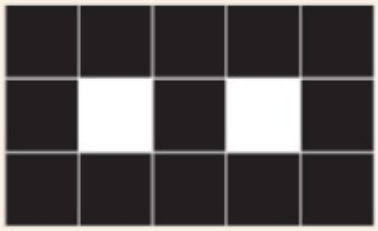
$4A = 85 - 5 \rightarrow A = 80 : 4 \rightarrow A = 20$; $E = 2A \rightarrow E = 40$; $F = A + 5 \rightarrow F = 25$

Europa: 40 América: 20 África: 25

Trac0

63. **Reúnanse en grupos, observen atentamente y resuelvan.**

Juan y Ana observan el siguiente diseño con recuadros negros y blancos. Ana dice que la cantidad de recuadros negros se puede calcular con la siguiente fórmula: **N = 5 . B + 3**.
B: recuadros blancos. **N**: recuadros negros.



a. Comprueben la fórmula teniendo en cuenta el diseño actual.

$13 = 5 . 2 + 3$ (N = 13; B = 2).

b. La fórmula pensada por Ana sirve para calcular cuántos recuadros negros tiene un diseño con 5 recuadros blancos. Calculen esa cantidad.

Si B = 5, entonces: $N = 5 . 5 + 3 = 25 + 3 = 28$. Hay 28 cuadrados negros.

c. ¿Cuántos recuadros blancos tiene un diseño con 33 recuadros negros?

Si N = 33, entonces: $33 = 5 . B + 3 \rightarrow 33 - 3 = 5 . B \rightarrow 30 : 5 = B \rightarrow 6 = B$. Hay 6 cuadrados blancos.

Integración final

64. **Resuelvan lo pedido en cada caso.**

a. El mayor número de 3 cifras menor que 300 que sea múltiplo de 15 y de 24. 240.

b. El menor número de 2 cifras que sea divisor de 78. 13.

c. El menor múltiplo común de 6 y de 8, mayor que 100. 120.

d. ¿Cuántos números de 3 cifras distintas y múltiplos de 6 se pueden formar utilizando los números 1, 2, 3 y 4? ¿Cuáles son?
Se pueden formar 6 números: 132, 234, 312, 324, 342 y 432.

65. **Factoreen los siguientes números e indiquen todos sus divisores. Realicen el diagrama de árbol en su carpeta.**

a. 75 = 3. 5^2. Divisores: 1, 3, 5, 15, 25, 75.

b. 100 = 2^2 . 5^2. Divisores: 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100.

c. 525 = 3 . 5^2. 7. Divisores: 1, 3, 5, 7, 15, 21, 25, 35, 75, 105, 175, 525.

d. 864 = 2^5 . 3^3. Divisores: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 27, 32, 36, 48, 54, 72, 96, 108, 144, 216, 288, 432, 864.

66. **Escriban V (verdadero) o F (falso), sin realizar las cuentas, sabiendo que:** *21 . 6 = 126*.

a. 126 es múltiplo de 14. V

b. 126 es múltiplo de 18. V

c. 126 es múltiplo de 8. F

d. 7 es divisor de 126. V

e. Si se divide 126 por 9, el resto no es 0. F

67. **Marquen una X, según corresponda.**

Es divisible por...	2	3	4	5	6
33		X			
123		X			
445				X	
450	X	X		X	X
1 078	X				

68. **Escriban lo pedido en cada caso.**

a. El dcm entre 42 y 70. 14

b. El mcm entre 42 y 70. 210

c. El dcm entre 45, 75 y 105. 15

d. El mcm entre 45, 75 y 105. 1 575

e. Tres números mayores que 20 y menores que 70 cuyo dcm sea 15. 30, 45 y 60.

f. Cuatro números menores que 115 cuyo dcm sea 28. 28, 56, 84 y 112.

69. **Reúnanse en grupos, lean atentamente y resuelvan.** TracO

a. Luis pensó un número, lo dividió por 7 y obtuvo resto 3. Luego, al número original le sumó un número para transformarlo en un múltiplo de 7. ¿Cuánto le sumó? Le sumó 4.

b. Encuentren 3 valores posibles de "a" para que "3 . (a + 1)" dividido 6 tenga resto 0. Indiquen qué condición debe cumplir el número "a".
Por ejemplo: 3, 5, 7. El valor de "a" debe ser impar.

c. Una librería debe empaquetar 84 libros de Matemática y 90 de Biología para enviarlos a distintas sucursales. Cada paquete debe contener la misma cantidad de libros de cada materia. ¿Cuántos paquetes se pueden armar como máximo? ¿Cuántos libros de cada materia tendrá cada paquete? dcm (84; 90) = 6. Se pueden armar como máximo 6 paquetes con 14 libros de Mat. y 15 de B.

d. Tres faros emiten una señal lumínica con distinta frecuencia. El primero, cada 12 minutos; el segundo, cada 18 minutos y el tercero, cada hora. Los tres comienzan a emitir a las 18 horas y se apagan a las 7 del día siguiente. ¿En qué horarios coinciden las tres señales?
mcm (12; 18; 60) = 180. Coinciden a las 18, 21, 0, 3 y 6.

e. Camila preparó 324 galletitas y 300 bombones para repartir en su cumpleaños y los quiere poner en bolsas que tengan la misma cantidad de cada tipo. ¿Cuántas bolsas puede armar como máximo? ¿Qué cantidad de galletitas y bombones tendrá cada bolsa?
Como máximo se pueden armar 12 bolsas. Cada una tendrá 27 galletitas y 25 bombones.

70. **Escriban en lenguaje simbólico.**

a. La suma entre el doble de un número y 8.
$2x + 8$

b. El doble de la suma entre un número y 8.
$2 \cdot (x + 8)$

c. La suma entre el siguiente de un número y el anterior de dicho número.
$x + 1 + x - 1 = 2x$

d. La suma de tres números consecutivos.
$x + x + 1 + x + 2$

e. La suma de dos números pares consecutivos.
$2x + 2x + 2 = 4x + 2$

f. La diferencia entre el cuadrado de un número y 2.
$x^2 - 2$

g. El cuadrado de la diferencia entre un número y 2.
$(x - 2)^2$

h. El producto entre el doble de un número y la raíz cuadrada de otro.
$2x \cdot \sqrt{y}$

71. **Resuelvan las siguientes ecuaciones y verifiquen.**

a. $2x - 4 = x + 3$ $2x - x = 3 + 4 \rightarrow x = 7$

b. $3x + 5 + 6x = 7x + 19 - 2$ $9x - 7x = 17 - 5 \rightarrow x = 6$

c. $(x + 12) : 2 + 1 = 8$ $x + 12 = (8 - 1) \cdot 2 \rightarrow x = 2$

d. $(3x + 2) \cdot 4 = 44$ $12x + 8 = 44 \rightarrow x = (44 - 8) : 12 \rightarrow x = 3$

e. $2 \cdot (x - 1) + 3 \cdot (x + 2) = 19$ $2x - 2 + 3x + 6 = 19 \rightarrow x = 3$

f. $5 \cdot (2x - 6) = 4 \cdot (2x + 5)$ $10x - 30 = 8x + 20 \rightarrow x = 25$

g. $\sqrt{169} : (1 + 12) = x - 8$ $13 : 13 = x - 8 \rightarrow 1 + 8 = x \rightarrow x = 9$

h. $(11 - 6)^2 + \sqrt{x} = 32$ $x = (32 - 25)^2 \rightarrow x = 7^2 \rightarrow x = 49$

i. $8 \cdot \sqrt[5]{x} - 4 = 12$ $x = [(12 + 4) : 8]^5 \rightarrow x = 2^5 \rightarrow x = 32$

j. $x^4 \cdot x = 243$ $x^5 = 243 \rightarrow x = 3$

k. $x^6 - 1 = 63$ $x^6 = 63 + 1 \rightarrow x^6 = 64 \rightarrow x = 2$

l. $x^5 \cdot x^2 : x^6 = 2^0 + \sqrt{4}$ $x = 1 + 2 \rightarrow x = 3$

m. $(x - 4)^2 = 36$ $x = 6 + 4 \rightarrow x = 10$

72. **Escriban en lenguaje coloquial las siguientes ecuaciones.**

a. $x + 1 = 3x - 9$ El siguiente de un número es igual a la diferencia entre el triple de ese número y nueve.

b. $4 \cdot (x - 1) = 8$ El cuádruplo del anterior de un número es igual a ocho.

c. $(x + 4) : 3 = 16$ La tercera parte de la suma entre un número y cuatro es igual a dieciséis.

d. $\sqrt{2x - 5} = 3$ La diferencia entre la raíz cuadrada del doble de un número y cinco es igual a tres.

73. **Reúnanse con un compañero, lean atentamente, escriban la ecuación y resuelvan.** TracO

a. La suma entre un número y 8 es igual a la diferencia entre el doble de dicho número y 32. ¿Cuál es el número?
$x + 8 = 2x - 32 \rightarrow 8 + 32 = 2x - x \rightarrow 40 = x$. El número es 40.

b. La suma de tres números es 140. El segundo número es el doble del primero y el tercero es el doble del segundo. ¿Cuáles son esos números?
$x + 2x + 4x = 140 \rightarrow 7x = 140 \rightarrow x = 20$. Los números son 20, 40 y 80.

c. Pablo y Juan coleccionan revistas y entre los dos tienen 135. Juan tiene 5 revistas menos que Pablo. ¿Cuántas revistas tiene cada uno?
$P + P - 5 = 135 \rightarrow 2P = 140 \rightarrow P = 70$. Pablo: 70 rev. y Juan, 65.

d. La suma de cuatro números consecutivos es 426. ¿Cuáles son esos números?
$x+x+1+x+2+x+3=426 \rightarrow 4x+6=426$. Los números: 105, 106, 107 y 108.

e. María invitó a sus amigos a su fiesta de 15. La cantidad de chicas supera en 7 al doble de la cantidad de varones. Si en total invitó a 64 amigos, ¿a cuántas chicas y a cuántos chicos invitó?
$v + 2v + 7 = 64 \rightarrow 3v = 57 \rightarrow v = 19$. Invitó a 45 chicas y 19 varones.

74. **Reúnanse en grupos, observen atentamente y respondan.** TracO

Luis forma cuadrados consecutivos con fósforos como lo indica la figura.

a. Decidan entre ustedes si la fórmula $F = 3 \cdot C + 1$ permite calcular la cantidad de fósforos necesarios para la figura de la imagen.
C: cantidad de cuadrados que se forman.
F: cantidad de fósforos.
La fórmula permite calcular la cantidad de fósforos.

b. ¿Sirve la fórmula anterior para calcular la cantidad de fósforos que tendrá la figura con 4 cuadrados consecutivos?
Sí. $F = 3 \cdot 4 + 1 = 13$. La cantidad de fósforos es 13.

c. Si Luis sigue armando cuadrados de la misma manera, ¿cuántos cuadrados puede formar con 106 fósforos?
$106 = 3 \cdot C + 1 \rightarrow 105 : 3 = C \rightarrow 35 = C$. Puede formar 35 cuadrados.

2 Fracciones y expresiones decimales

9. Números racionales. Representación en la recta

▶ SABERES DINÁMICOS

Números racionales

Se llama **número racional** a todo número que se puede escribir como un cociente $\frac{a}{b}$ llamado fracción, donde a y b son números enteros (con b distinto de 0).

$\frac{a}{b}$ → "a" es el numerador
$\frac{a}{b}$ → "b" es el denominador

$\frac{1}{4}$: el numerador es 1 y el denominador es 4. *$\frac{10}{3}$: el numerador es 10 y el denominador es 3.*

En los siguientes ejemplos se representaron fracciones de un entero dividido en partes iguales.

$\frac{1}{2}$ $\frac{4}{7}$ $\frac{5}{6}$

$\frac{1}{6}$ $\frac{6}{7}$ $\frac{1}{12}$

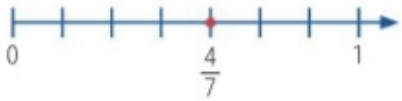
Toda fracción cuyo numerador es mayor que el denominador resulta mayor que 1 entero y puede expresarse como **número mixto**.

$\frac{7}{6}$ equivale a $\frac{6}{6}$ (que es 1 entero) más $\frac{1}{6}$ $\frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$

$\frac{7}{6} > 1$ → $1\frac{1}{6}$ es el número mixto

Representación en la recta numérica

Para representar $\frac{4}{7}$, por ejemplo, se divide la unidad en 7 partes iguales y se toman 4 partes.



TEST DE COMPRENSIÓN

1. Lean atentamente y respondan.
   a. Escriban tres fracciones que representen un entero. Por ejemplo $\frac{7}{7}$; $\frac{5}{5}$; $\frac{12}{12}$
   b. Si una fracción tiene un numerador menor que el denominador, ¿cuál es la parte entera de su expresión decimal? La parte entera es 0.
   c. Realicen una tabla con los encabezados "Menores que un entero" y "Mayores que un entero" e incluyan tres ejemplos de fracciones para cada caso.

ApAp

Menores que un entero	Mayores que un entero
2/5; 3/7; 8/11	3/2; 6/5; 9/4

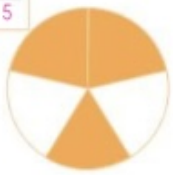
ACTIVIDADES

9. Números racionales. Representación en la recta

1. Escriban la fracción que representa la parte sombreada.

a. $\frac{1}{8}$

b. $\frac{3}{5}$

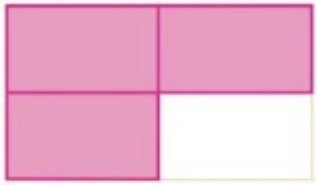


c. $\frac{1}{4}$

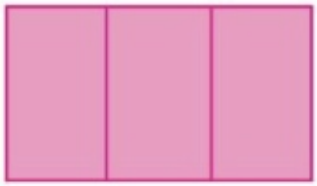
2. Representen gráficamente cada fracción.

a. $\frac{1}{2}$

b. $\frac{3}{4}$



c. $\frac{3}{3}$



3. Escriban una fracción que cumpla lo pedido en cada caso.

a. Tiene como numerador un número par y como denominador un número impar. $\frac{4}{7}$

b. Tiene numerador igual a 1 y como denominador un número múltiplo de 5. $\frac{1}{25}$

c. Tiene como numerador un número múltiplo de 8 y como denominador el doble del número que es su numerador. $\frac{16}{32}$

d. Tiene como numerador un número múltiplo de 10, como denominador un número impar y se puede transformar en número mixto. $\frac{30}{9}$

4. Representen cada fracción en la recta numérica.

a. $\frac{1}{3}$

b. $\frac{3}{5}$

c. $\frac{7}{2}$

d. $\frac{8}{4}$

5. Escriban cada fracción como número mixto.

a. $\frac{11}{3} = 3\frac{2}{3}$

b. $\frac{11}{6} = 1\frac{5}{6}$

c. $\frac{21}{5} = 4\frac{1}{5}$

d. $\frac{97}{9} = 10\frac{7}{9}$

6. Escriban como fracción los siguientes números mixtos.

a. $2\frac{3}{5} = \frac{13}{5}$

b. $1\frac{7}{4} = \frac{11}{4}$

c. $9\frac{2}{7} = \frac{65}{7}$

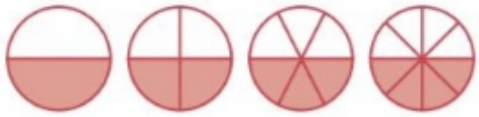
d. $4\frac{5}{8} = \frac{37}{8}$

10. Fracciones equivalentes. Comparación de fracciones

▶ SABERES DINÁMICOS

Fracciones equivalentes

Dos fracciones son **equivalentes** cuando representan el mismo número.



Las fracciones representan la misma porción sombreada del círculo, con lo cual corresponden a fracciones equivalentes.

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$

Procedimiento para obtener fracciones equivalentes	
Amplificando: se multiplica el numerador y el denominador por el mismo número natural.	**Simplificando**: se divide el numerador y el denominador por el mismo número natural que sea divisor de ambos.
$\frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 2} = \frac{6}{14}$	$\frac{10}{25} = \frac{10 : 5}{25 : 5} = \frac{2}{5}$

Fracciones irreducibles

Una fracción $\frac{a}{b}$ es **irreducible** cuando el numerador y el denominador tienen solo como divisor común a 1, es decir, cuando los números "a" y "b" son coprimos.

Si una fracción no es irreducible, se dice que es **reducible**; es decir que se puede simplificar.

$\frac{5}{6}; \frac{11}{3}; \frac{2}{25}$ son fracciones irreducibles.

$\frac{3}{9}; \frac{14}{28}; \frac{2}{8}$ son fracciones reducibles.

Comparación de fracciones

Para **comparar fracciones** se puede aplicar alguno de los siguientes métodos:

Método A: se buscan fracciones equivalentes con el mismo denominador y se comparan los nuevos numeradores. Será menor la fracción cuyo numerador sea menor.	**Método B:** se multiplica cruzado el numerador de una fracción por el denominador de la otra y se coloca el resultado obtenido encima del numerador utilizado. Luego, se comparan los resultados.

Para comparar $\frac{2}{3}$ y $\frac{5}{4}$.

$\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$

$\frac{5}{4} = \frac{15}{12}$

Fracciones equivalentes → Se compara $\frac{8}{12} < \frac{15}{12}$

Por lo tanto $\frac{2}{3} < \frac{5}{4}$

$\frac{2}{3}$ (8) — $\frac{5}{4}$ (15)

Como 8 es menor que 15, entonces:

$\frac{2}{3} < \frac{5}{4}$

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Resuelvan y expliquen las respuestas.
   a. ¿Cuántas fracciones equivalentes tiene la fracción $\frac{2}{3}$? Tiene infinitas fracciones equivalentes, ya que el numerador y el denominador se pueden multiplicar por infinitos números naturales.
   b. Si dos fracciones tienen numerador 1, ¿es mayor la que tiene menor denominador? Sí, porque la unidad se divide en menos partes en la fracción con menor denominador.
   c. Encuentren una estrategia diferente a las dadas para explicar que $\frac{2}{3} < \frac{5}{4}$.

ApAp

La primera fracción $\frac{2}{3}$, tiene un numerador menor que su denominador, por eso, es menor que 1, mientras que en la segunda fracción $\frac{5}{4}$, el numerador es mayor a su denominador, por lo tanto, será mayor que 1. Así $\frac{2}{3} < \frac{5}{4}$

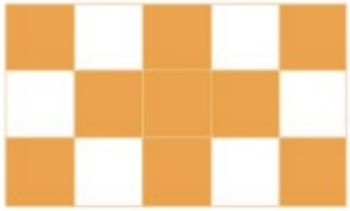
ACTIVIDADES

10. Fracciones equivalentes. Comparación de fracciones

7. Completen la tabla usando fracciones equivalentes.

Simplificando	Fracción	Amplificando
$\frac{4}{5}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{16}{20}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{24}{48}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{15}{20}$	$\frac{45}{60}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{14}$	$\frac{14}{28}$
$\frac{3}{2}$	$\frac{30}{20}$	$\frac{90}{60}$

8. Escriban la fracción que representa la parte sombreada y luego exprésenla en forma irreducible.

a. 

$\frac{9}{15} = \frac{3}{5}$

b.

$\frac{8}{18} = \frac{4}{9}$

9. Completen con > o < según corresponda.

a. $\frac{2}{7}$ > $\frac{1}{14}$

b. $\frac{5}{6}$ > $\frac{3}{4}$

c. $\frac{9}{13}$ < $\frac{10}{4}$

d. $\frac{12}{5}$ > $\frac{1}{8}$

e. $\frac{1}{21}$ < $\frac{11}{12}$

f. $\frac{20}{7}$ > $\frac{12}{14}$

10. Resuelvan.

a. En una escuela, los cursos 1.° A y 1.° B se fueron de excursión en dos micros. Los alumnos de 1° A ocuparon 36 asientos de los 54 que tiene y en el micro de 1.° B quedaron libres 9 asientos de los 48 que tiene. ¿En cuál micro hubo mayor ocupación?

Ocupación en el micro de 1.° A: 36/54 = 2/3 = 32/48; en el micro de 1.° B: 39/48, por lo tanto, en el micro de 1.° B hubo mayor ocupación.

b. Del total de alumnos de una escuela, $\frac{1}{5}$ estudia alemán; $\frac{7}{10}$ estudia francés y $\frac{3}{30}$ estudia portugués. ¿Cuál es el idioma más estudiado y cuál es el idioma menos estudiado?

Alemán: 1/5 = 6/30; francés: 7/10 = 21/30; portugués: 3/30.

El idioma más estudiado es el francés y el menos estudiado, el portugués.

c. Camila fue a comprar caramelos de diversos gustos: $\frac{1}{6}$ de los caramelos era de menta; $\frac{2}{4}$, de frutilla y $\frac{4}{12}$, de ananá. ¿De qué gusto compró menos?

Menta: 1/6 = 2/12; frutilla: 2/4: 6/12; ananá: 4/12.

Camila compró menos caramelos de menta.

11. Operaciones con fracciones

▶ SABERES DINÁMICOS

Adición y sustracción

Para **sumar o restar fracciones de igual denominador,** se suman o restan los numeradores y el denominador queda igual.

Se suman y/o restan los numeradores

$$\frac{2}{5}+\frac{7}{5}-\frac{3}{5}=\frac{2+7-3}{5}=\frac{6}{5}$$

Para **sumar o restar fracciones de distinto denominador,** se buscan fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador y luego se resuelve.
Para encontrar el denominador común, se busca el múltiplo común menor entre los denominadores.

Fracciones equivalentes — Siempre que sea posible, simplificar el resultado

$$\frac{2}{3}+\frac{5}{12}-\frac{1}{4}=\frac{8}{12}+\frac{5}{12}-\frac{3}{12}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$$

mcm(3; 12; 4)

Los números enteros tienen denominador 1: $2=\frac{2}{1}$

Fracciones equivalentes

$$2-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{20}{10}-\frac{5}{10}+\frac{2}{10}=\frac{17}{10}$$

mcm(1;2;5)

Multiplicación y división

Para **multiplicar fracciones,** se multiplican los numeradores entre sí y los denominadores entre sí.

Se multiplican numeradores

$$\frac{6}{5}\cdot\frac{10}{9}=\frac{6\cdot 10}{5\cdot 9}=\frac{60}{45}=\frac{4}{3}$$

Se simplifica el resultado

Se multiplican denominadores

$$\frac{8}{15}\cdot\frac{25}{4}=\frac{\overset{2}{\cancel{8}}}{\underset{3}{\cancel{15}}}\cdot\frac{\overset{5}{\cancel{25}}}{\underset{1}{\cancel{4}}}=\frac{10}{3}$$

Se calcula el resultado

Se simplifica

TIP

Se puede multiplicar primero y simplificar el resultado o simplificar las fracciones primero y luego calcular el resultado.
Ambos procedimientos son correctos.

- El **inverso multiplicativo** de una fracción se obtiene invirtiendo el numerador y el denominador.
  Toda fracción distinta de cero admite un inverso multiplicativo.

  El inverso multiplicativo de $\frac{2}{5}$ es $\frac{5}{2}$.

- El producto de una fracción con su inverso multiplicativo es igual a 1.

  $\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{2}=1.$

- Para calcular la **fracción de una cantidad**, siempre se multiplica la fracción por esa cantidad.

  $\frac{1}{2}$ de 600 es igual a $\frac{1}{2}\cdot 600=300.$

11. Operaciones con fracciones

Para **dividir dos fracciones,** se multiplica la primera fracción por el inverso multiplicativo de la segunda fracción.

Para resolver $\frac{2}{7} : \frac{6}{14}$, se transforma la división en multiplicación.

$$\frac{2}{7} : \frac{6}{14} = \frac{2}{7} \cdot \frac{14}{6} = \frac{28}{42} = \frac{2}{3}$$

Inverso multiplicativo — Resolvemos y simplificamos

Recuerden:

En una división de fracciones el inverso multiplicativo es de la segunda fracción.

El inverso multiplicativo de un número entero "a" (distinto de 0) es $\frac{1}{a}$.

El inverso multiplicativo de 3 es $\frac{1}{3}$.

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.

a. ¿Es cierto que el inverso multiplicativo del número mixto $1\frac{2}{3}$ es $\frac{3}{5}$? Sí, porque $1\frac{2}{3} = \frac{5}{3}$, por lo tanto, el inverso multiplicativo es $\frac{3}{5}$.

b. Para resolver $\frac{4}{5} : 2$, ¿es correcto hacer $\frac{5}{4} \cdot 2$? No, porque para transformar la división en multiplicación se utiliza el inverso multiplicativo de la segunda fracción.

ApAp

c. ¿Es correcto dividir $\frac{8}{9} : \frac{4}{3}$ haciendo $\frac{8:4}{9:3} = \frac{2}{3}$? ¿Cómo harían para resolver $\frac{3}{5} : \frac{1}{2}$ de la misma manera?

Sí, es correcto. En el segundo cálculo habría que buscar una fracción equivalente a $\frac{3}{5}$ de manera tal que el denominador sea divisible por 2 (con el numerador no hay problema por ser un 1).

ACTIVIDADES

11. Operaciones con fracciones

11. Unan con una flecha cada operación con el resultado correspondiente.

a. $\frac{1}{5} + \frac{4}{10} =$ · $\frac{13}{24}$

b. $\frac{2}{3} - \frac{1}{8} =$ · $1\frac{1}{6}$

c. $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} =$ · $\frac{3}{5}$

d. $\frac{7}{4} - \frac{1}{2} + 2 =$ · $3\frac{1}{4}$

e. $\frac{1}{3} + \left(2 + \frac{2}{5}\right) =$ · 2

f. $5 - \left(\frac{4}{3} + \frac{10}{6}\right) =$ · $\frac{41}{15}$

11. Operaciones con fracciones

12. Transformen los números mixtos en fracciones y resuelvan.

a. $2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{4} =$

$\frac{5}{2} + \frac{5}{4} = \frac{10}{4} + \frac{5}{4} = \frac{15}{4}$

b. $5\frac{2}{3} - 3\frac{1}{6} =$

$\frac{17}{3} - \frac{19}{6} = \frac{34}{6} - \frac{19}{6} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$

c. $4\frac{7}{8} + 2\frac{1}{4} - 1\frac{1}{2} =$

$\frac{39}{8} + \frac{9}{4} - \frac{3}{2} = \frac{39}{8} + \frac{18}{8} - \frac{12}{8} = \frac{45}{8}$

13. Resuelvan y simplifiquen cuando sea posible.

a. $\frac{10}{6} \cdot \frac{20}{12} =$ $\frac{200}{72} = \frac{25}{9}$

b. $\frac{18}{33} \cdot \frac{11}{6} =$ $\frac{198}{198} = 1$

c. $\frac{25}{75} \cdot \frac{24}{16} =$ $\frac{600}{1\,200} = \frac{1}{2}$

d. $\frac{12}{17} : \frac{6}{34} =$ $\frac{12}{17} \cdot \frac{34}{6} = \frac{408}{102} = 4$

e. $\frac{100}{68} : \frac{50}{40} =$ $\frac{100}{68} \cdot \frac{40}{50} = \frac{4\,000}{3\,400} = \frac{20}{17}$

f. $\frac{1}{9} : 5 =$ $\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{45}$

14. Completen los espacios vacíos con una fracción de distinto denominador que verifique la igualdad.

a. $\boxed{\frac{1}{3}} + \frac{3}{5} = \frac{14}{15}$

b. $\frac{8}{3} - \boxed{\frac{5}{12}} = \frac{27}{12}$

c. $\frac{3}{7} + \frac{5}{14} - \boxed{\frac{2}{7}} = \frac{1}{2}$

d. $\frac{2}{3} + \boxed{\frac{1}{6}} = \frac{5}{6}$

e. $\left(\boxed{\frac{7}{2}} - 1\right) \cdot 2 = 5$

f. $\boxed{\frac{17}{8}} \cdot \frac{4}{34} = \frac{1}{4}$

g. $\frac{1}{2} : \boxed{\frac{5}{8}} = \frac{4}{5}$

h. $\left(\frac{1}{3} + 1\right) \cdot \boxed{\frac{2}{9}} = \frac{8}{27}$

15. Resuelvan.

a. Julián debe repartir el pan pedido por 3 confiterías. En la primera encargaron $13\frac{1}{2}$ kg; en la segunda, $\frac{33}{4}$ kg y en la tercera, $\frac{21}{2}$ kg. Si Julián preparó en total 35 kg de pan, ¿cuántos kg le quedarán sin repartir?

35 − (13 1/2 + 8 1/4 + 10 1/2) = 35 − (32 1/4) = 2 3/4

Le quedarán sin repartir $2\frac{3}{4}$ kg.

b. Ana hizo $\frac{1}{4}$ de su tarea a la mañana y $\frac{2}{3}$ a la tarde. ¿Cuánto le falta para finalizarla?

1 − (1/4 + 2/3) = 1 − (3/12 + 8/12) = 1/12

Le falta para finalizarla $\frac{1}{12}$ de su tarea.

c. ¿Cuántos vasos de $\frac{1}{6}$ L se pueden llenar con el contenido de un bidón de agua de $\frac{19}{3}$ L?

19/3 : 1/6 = 19/3 . 6 = 38 Se pueden llenar 38 vasos.

16. Inventen el enunciado de un problema que use como datos las fracciones indicadas. Luego, resuelvan el problema.

$\frac{2}{5}; \frac{1}{4}; \frac{7}{20}$ Por ejemplo: El papá les pidió a Zoe y a Julián que ayuden a cortar el pasto de su casa, durante el primer día Julián cortó 2/5 partes del pasto, el segundo día Zoe cortó 1/4 del total y el tercer día cortaron juntos 7/20 del pasto. ¿Terminaron de cortar el pasto el tercer día? 2/5 + 1/4 + 7/20 = 8/20 + 5/20 + 7/20 = 1. Sí, terminaron de cortar el pasto el tercer día.

Operaciones con fracciones

Escriban V (verdadero) o F (falso). Expliquen las respuestas en la carpeta.

a. El producto entre un número y su inverso multiplicativo es igual a 0. El producto es 1. F

b. El resultado de $\frac{2}{7} : \frac{6}{5}$ es igual al resultado de $\frac{7}{2} \cdot \frac{6}{5}$. El resultado de 2/7 : 6/5 es igual al resultado de 2/7 . 5/6. F

c. El número 2 puede expresarse como $\frac{2}{1}$. V

d. El cálculo que corresponde a "un quinto de 88" es $\frac{1}{5} + 88$. Un quinto de 88 es 1/5 . 88. F

18. Escriban un ejemplo numérico para cada operación. Luego, resuélvanla.

a. Una multiplicación entre una fracción irreducible y su inverso multiplicativo. Por ejemplo, 2/3 . 3/2 = 1

b. Una división entre un número mixto y un número natural. Por ejemplo, 1 1/3 : 2 = 2/3

c. La mitad de una fracción que representa más de un entero. Por ejemplo, 7/3 : 2 = 7/6

d. La multiplicación entre dos fracciones irreducibles. Por ejemplo, 1/2 . 1/3 = 1/6

19. En las siguientes operaciones se han borrado los signos. Completen con el signo necesario para que se verifique la igualdad.

a. $\frac{1}{6}$ [+] $\frac{2}{3} = \frac{5}{6}$

b. $\frac{7}{4}$ [.] $\frac{8}{14} = 1$

c. $\frac{9}{2}$ [-] $\frac{21}{30} = \frac{19}{5}$

d. $\frac{16}{10}$ [:] $\frac{2}{5} = 4$

Trac0

20. Reúnanse con un compañero y resuelvan.

a. Marina describe el trayecto desde su casa al trabajo según los cálculos que realizó: "$\frac{1}{5}$ lo hago caminando; $\frac{2}{3}$, en tren y el resto, en subte". ¿Qué parte recorre en subte?

1 − (1/5 + 2/3) = 1 − (3/15 + 10/15) = 2/15 En subte recorre 2/15 partes del trayecto a su trabajo.

b. Viviana comentó que el lunes gastó $\frac{3}{4}$ de sus ahorros y el martes gastó $\frac{3}{8}$ de sus ahorros. ¿Es posible? ¿Por qué?

3/4 + 3/8 = 6/8 + 3/8 = 11/8 No es posible, porque lo que gastó supera a la unidad, es decir, a la totalidad de sus ahorros.

c. En una empresa deben embotellar 1 200 l de agua mineralizada y elegir qué tipo de envase utilizarán. Completen la tabla donde se calcula cuántos envases necesitarían en cada caso.

Capacidad de cada botella (en litros)	$\frac{3}{4}$	1	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{2}$	$\frac{25}{8}$
Cantidad de botellas necesarias	1 600	1 200	960	800	384

d. ¿A qué es igual la mitad de la tercera parte de un quinto?

(1/5 : 3) : 2 = (1/5 . 1/3) : 2 = 1/15 : 2 = 1/15 . 1/2 = 1/30

12. Potenciación y radicación de fracciones

▶ SABERES DINÁMICOS

La **potenciación** permite escribir de forma abreviada una multiplicación de factores iguales.
La base de esa potencia es el factor que se repite y el exponente de la potencia es el número de veces que se repite.

$\underbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}_{\text{Factor}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2}$ ← cantidad de veces que se repite el factor

$\left(\frac{2}{7}\right)^{3} = \underbrace{\frac{2}{7}\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{2}{7}}_{\text{Base que se repite 3 veces como indica el exponente}}$

Para obtener la potencia de una fracción, se debe calcular la potencia del numerador y la potencia del denominador.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{n} = \frac{a^{n}}{b^{n}}$$

$\left(\frac{4}{5}\right)^{2} = \frac{4^{2}}{5^{2}} = \frac{16}{25}$ $\qquad$ $\left(\frac{2}{3}\right)^{3} = \frac{2^{3}}{3^{3}} = \frac{8}{27}$

La potenciación de todo número elevado a la cero es igual a 1.

$\left(\frac{7}{8}\right)^{0} = 1$ $\qquad$ $\left(\frac{9}{2}\right)^{0} = 1$

La **radicación** es la operación inversa de la potenciación.
Para obtener la raíz de una fracción se debe calcular la raíz del numerador y la raíz del denominador.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3}$ $\qquad$ $\sqrt{\frac{25}{100}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{100}} = \frac{5}{10}$

La potenciación y radicación de fracciones cumplen las mismas propiedades que para los números naturales.

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/potenfra* y en puerto.pub/raizfra** para observar videos que les ayudarán a entender mejor la potenciación y la radicación de fracciones.

Enlaces acortados de * https://youtu.be/cu1zd2d0Klo y ** https://youtu.be/CFq0JMkqFgA

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen sus respuestas.

a. ¿Cuál es el resultado de $\frac{2^{2}}{3^{2}}$? 4/9

b. ¿Es cierto que $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$? Sí, $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$

ApAp

c. Para calcular $\left(\frac{2}{3}\right)^{2}$, ¿por qué hay que escribir la fracción entre paréntesis?

Para elevar una fracción a una potencia se la debe escribir entre paréntesis para indicar que la potencia afecta tanto al numerador como al denominador.

ACTIVIDADES

12. Potenciación y radicación de fracciones

21. Calculen las siguientes potencias y raíces.

a. $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$

b. $\left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125}$

c. $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$

d. $\left(\frac{11}{9}\right)^0 = 1$

e. $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$

f. $\sqrt{\frac{64}{81}} = \frac{8}{9}$

g. $\sqrt[4]{\frac{1}{256}} = \frac{1}{4}$

h. $\sqrt[3]{\frac{125}{8}} = \frac{5}{2}$

i. $\sqrt[3]{\frac{64}{27}} = \frac{4}{3}$

j. $\sqrt{\frac{36}{100}} = \frac{6}{10}$

22. Completen los espacios vacíos en los siguientes cálculos.

a. $\left(\frac{12}{5}\right)^2 = \frac{144}{25}$

b. $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$

c. $\sqrt{\frac{169}{625}} = \frac{13}{25}$

d. $\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{2}{3}$

23. Escriban en lenguaje simbólico y resuelvan.

a. El cubo de tres cuartos.

$(3/4)^3 = 27/64$

b. La raíz cuadrada de dieciséis centésimos.

$\sqrt{16/100} = 4/10$

c. El cuadrado de siete novenos.

$(7/9)^2 = 49/81$

d. La raíz cúbica de ocho milésimos.

$\sqrt[3]{(8/1\,000)} = 2/10$

e. La raíz cuarta de un dieciseisavo.

$\sqrt[4]{(1/16)} = 1/2$

24. Resuelvan.

a. Si el cuadrado de un número es igual a $\frac{121}{64}$, ¿cuál es el número?

$x^2 = 121/64 \rightarrow x = \sqrt{121/64} \rightarrow x = 11/8$ El número es 11/8.

b. Si el área de un cuadrado es igual a $\frac{25}{9}$ cm^2, ¿cuánto mide su lado?

$\sqrt{25/9\ cm^2} = 5/3$ cm El lado mide 5/3 cm.

25. Escriban en lenguaje coloquial y luego resuelvan.

a. $\left(\frac{2}{3}\right)^3$ El cubo de dos tercios. 8/27.

b. $\sqrt{\frac{81}{100}}$ La raíz cuadrada de ochenta y un centésimos. 9/10.

c. $\left(\frac{1}{5}\right)^2$ El cuadrado de un quinto. 1/25.

d. $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$ La raíz cuarta de un dieciseisavo. 1/2.

13. Operaciones combinadas con fracciones

▶ SABERES DINÁMICOS

Para **resolver un cálculo combinando operaciones,** pueden seguir las siguientes recomendaciones:

1. Se separa en términos.
2. En el caso de haber paréntesis, se resuelven las operaciones que están dentro.
3. Se resuelven las potencias y raíces.
4. Se resuelven las multiplicaciones y divisiones.
5. Se resuelven las sumas y restas.
6. Se simplifica, si es posible, el resultado.

Se separa en términos

$$\overbrace{\frac{7}{3}}+\overbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^2}-\overbrace{\frac{2}{5}:\frac{4}{10}}+\overbrace{\sqrt{\frac{9}{16}}}=$$ Se separa en términos.

$$\frac{7}{3}+\frac{1}{4}-\frac{2}{5}:\frac{4}{10}+\frac{3}{4}=$$ Se resuelven potencias y raíces.

$$\frac{7}{3}+\frac{1}{4}-1+\frac{3}{4}=$$ Se resuelven multiplicaciones y divisiones.

$$\frac{28}{12}=$$ Se resuelven sumas y restas.

$$=\frac{7}{3}$$ Se simplifica el resultado.

Se separa en términos

$$\overbrace{\frac{1}{5}}+\overbrace{\left(\sqrt[3]{\frac{8}{27}}+\overbrace{\frac{4}{5}\cdot\frac{10}{6}}\right)}-\overbrace{\frac{3}{10}\cdot\frac{5}{6}}=$$ Se separa en términos.

$$\frac{1}{5}+2-\frac{3}{10}\cdot\frac{5}{6}=$$ Se resuelve el paréntesis.

$$\frac{1}{5}+2-\frac{1}{4}=$$ Se resuelven multiplicaciones y divisiones.

$$=\frac{39}{20}$$ Se resuelven sumas y restas.

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen sus respuestas.

a. ¿Cuántos términos tiene el siguiente cálculo combinado: $\frac{2}{9}-\frac{31}{12}\cdot\frac{7}{6}$? El cálculo combinado tiene dos términos.

b. ¿Dónde se deberían colocar los paréntesis para que el resultado de $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}+\frac{3}{8}$ sea $\frac{1}{4}$? Los paréntesis se deben colocar así: 1/2 . (1/8 + 3/8) = 1/4.

ApAp

c. Tengan en cuenta la separación de términos que se realiza en las operaciones combinadas e indiquen por qué tiene sentido que las últimas operaciones que se realizan son las sumas y las restas.

Tanto la suma como la resta separan términos, por lo tanto, al resolver cada término su resolución queda para el final.

ACTIVIDADES

13. Operaciones combinadas con fracciones

26. Resuelvan.

a. $\left(\frac{5}{2}-1\right):\frac{6}{4}-\left(\frac{7}{8}\right)^0=$

$\frac{3}{2}:\frac{6}{4}-1=$

$1-1=0$

b. $\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)^2+\sqrt{\frac{3}{2}+\frac{3}{4}}=$

$\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{4}\right)^2+\sqrt{\frac{6}{4}+\frac{3}{4}}=$

$\left(\frac{1}{4}\right)^2+\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{1}{16}+\frac{3}{2}=$

$\frac{1}{16}+\frac{24}{16}=\frac{25}{16}$

c. $\left(\frac{5}{7}\cdot\frac{14}{20}+\frac{1}{5}\right)+\sqrt{\frac{1}{4}}=$

$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}=$

$\frac{5}{10}+\frac{2}{10}+\frac{5}{10}=$

$\frac{12}{10}=\frac{6}{5}$

d. $\sqrt{\frac{36}{100}}+\left(\frac{1}{5}+1\right):\frac{12}{5}-\frac{1}{10}=$

$\frac{6}{10}+\frac{6}{5}\cdot\frac{5}{12}-\frac{1}{10}=$

$\frac{6}{10}+\frac{1}{2}-\frac{1}{10}=$

$\frac{6}{10}+\frac{5}{10}-\frac{1}{10}=1$

e. $\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\right)+1:\frac{1}{4}=$

$\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\right)+1\cdot 4=$

$\frac{4}{6}-\frac{1}{6}+4=\frac{27}{6}=\frac{9}{2}$

f. $\sqrt[3]{\frac{7}{8}-\frac{3}{4}}:\frac{1}{4}-\frac{7}{6}=$

$\sqrt[3]{\frac{7}{8}-\frac{6}{8}}:\frac{1}{4}-\frac{7}{6}=$

$\sqrt[3]{\frac{1}{8}}:\frac{1}{4}-\frac{7}{6}=\frac{1}{2}\cdot 4-\frac{7}{6}=$

$2-\frac{7}{6}=\frac{5}{6}$

g. $\sqrt{\frac{25}{16}}\cdot\frac{4}{10}-\left(\frac{11}{13}\right)^0\cdot\frac{1}{2}=$

$\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{10}-1\cdot\frac{1}{2}=$

$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$

h. $\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\sqrt{\frac{1}{16}}+\sqrt[5]{\frac{1}{32}}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{64}}=$

$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=$

$\frac{1}{16}+\frac{1}{8}=$

$\frac{1}{16}+\frac{2}{16}=\frac{3}{16}$

27. Escriban en lenguaje simbólico y resuelvan.

a. La suma entre el cuadrado de un medio y el doble de tres cuartos.

$(1/2)^2+2\cdot 3/4=1/4+6/4=7/4$

b. La diferencia entre seis quintos y la raíz cúbica de un octavo.

$6/5-\sqrt[3]{(1/8)}=6/5-1/2=12/10-5/10=7/10$

c. El cubo de la suma entre uno y tres décimos.

$(1+3/10)^3=(13/10)^3=2\,197/1\,000$

d. La suma entre la mitad de ocho séptimos y un quinto de diez tercios.

$8/7:2+1/5\cdot 10/3=4/7+2/3=12/21+14/21=26/21$

28. Coloquen los paréntesis en el lugar necesario para obtener los resultados.

a. $\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{8}$

b. $1-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{10}\right)=\frac{7}{10}$

c. $\left(150:3+4\right)\cdot\frac{1}{2}=27$

d. $\frac{1}{2}:\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\right)=\frac{4}{5}$

e. $\left(\frac{7}{9}-\frac{1}{9}\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

f. $\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\right)=\frac{31}{40}$

13. Operaciones combinadas con fracciones

29. Escriban en lenguaje coloquial y resuelvan.

a. $\frac{3}{7} + \sqrt{\frac{1}{9}}$

La suma entre tres séptimos y la raíz cuadrada de un noveno. 3/7 + 1/3 = 9/21 + 7/21 = 16/21.

b. $2 \cdot \left(\frac{4}{3} - \frac{2}{6}\right)^2$

El doble del cuadrado de la diferencia entre cuatro tercios y dos sextos. $2 \cdot (8/6 - 2/6)^2 = 2 \cdot 1^2 = 2$.

c. $\left(\frac{2}{6}\right)^2 + \sqrt[3]{\frac{1}{27}}$

La suma entre el cuadrado de dos sextos y la raíz cúbica de un veintisieteavo. 4/36 + 1/3 = 1/9 + 3/9 = 4/9.

d. $\frac{2}{5} \cdot \frac{10}{8} + \frac{1}{4}$

La suma entre los dos quintos de diez octavos y un cuarto. 1/2 + 1/4 = 2/4 + 1/4 = 3/4.

e. $\sqrt{2 \cdot \left(\frac{22}{16} + \frac{133}{8}\right)}$

La raíz cuadrada del doble de la suma entre veintidós dieciseisavo y ciento treinta y tres octavos $\sqrt{2 \cdot \left(\frac{11}{8} + \frac{133}{8}\right)} = \sqrt{2 \cdot \frac{144}{8}} = \sqrt{36} = 6$.

30. Calculen las operaciones indicadas sabiendo que $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{3}{5}$ y $C = \frac{4}{9}$ y expresen el resultado en número mixto cuando sea posible.

a. $(A^2 + B) : C =$

(1/4 + 3/5) : 4/9 = (5/20 + 12/20) . 9/4 = 17/20 . 9/4 = 153/80 = 1 73/80

b. $\sqrt{C} - A + 5 \cdot B =$

2/3 − 1/2 + 5 . 3/5 = 4/6 − 3/6 + 3 = 1/6 + 3 = 3 1/6

c. $(A - C) \cdot B + A^3 =$

(1/2 − 4/9) . 3/5 + 1/8 = (9/18 − 8/18) . 3/5 + 1/8 = 1/18 . 3/5 + 1/8 = 1/30 + 1/8 = 4/120 + 15/120 = 19/120

31. Planteen las situaciones y resuelvan.

a. La nutricionista de Juan le preparó una dieta equilibrada con un consumo diario de 2 000 calorías distribuidas de la siguiente manera: $\frac{2}{5}$ en el almuerzo, la mitad del resto en la cena y las calorías que faltan repartirlas en partes iguales entre el desayuno y la merienda. ¿Cuántas calorías debe consumir Juan en cada comida?

2/5 . 2 000 = 800; 3/5 . 1/2 . 2 000 = 600; (2 000 − 800 − 600) : 2 = 300.

Juan debe consumir 800 calorías en el almuerzo, 600 calorías en la cena y 300 calorías en el desayuno y 300 en la merienda.

b. Una agencia de viajes promociona una excursión por la Ciudad de Buenos Aires que incluye transporte con guía de turismo, entrada a un museo y almuerzo, todo por $1 800. Si a los menores entre 5 y 12 años les cuesta $\frac{5}{6}$ de la tarifa y a los menores de 5 años, $\frac{1}{3}$ de la tarifa, ¿cuánto abonará una familia compuesta por dos adultos y dos niños de 4 y 9 años, respectivamente?

5/6 . 1 800 = 1 500; 1/3 . 1 800 = 600; 1 800 + 1 800 + 1 500 + 600 = 5 700. La familia abonará $5 700.

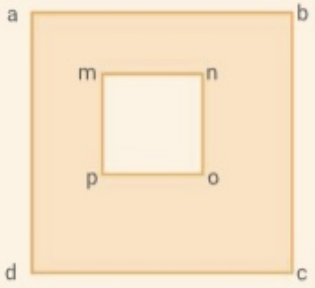
13. Operaciones combinadas con fracciones

Trac0

32. Reúnanse con un compañero, observen las figuras y calculen el perímetro de la que está sombreada.

a. El lado del cuadrado abcd mide $\frac{5}{4}$ m.

El lado del cuadrado mnop mide $\frac{2}{5}$ del lado $\overline{ab}$.



$4 \cdot \frac{5}{4} + 4 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{4} =$

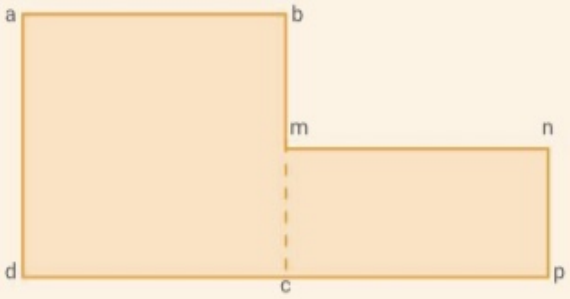
$5 + 2 = 7$

Perímetro = 7 m

b. El área del cuadrado abcd es $\frac{49}{9}$ m^2.

m es el punto medio del lado $\overline{bc}$.

El lado $\overline{mn}$ del rectángulo mnpc mide $\frac{3}{2}$ del lado $\overline{ab}$.



$3 \cdot \sqrt{\frac{49}{9}} + 2 \cdot \sqrt{\frac{49}{9}} \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{49}{9}} =$

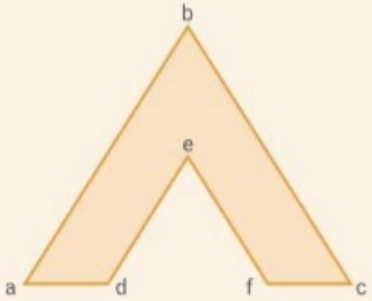
$3 \cdot \frac{7}{3} + 2 \cdot \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{7}{3} =$

$7 + \frac{7}{3} + \frac{21}{3} =$

Perímetro = $\frac{49}{3}$ m

c. El perímetro del triángulo equilátero abc es $\frac{7}{2}$ cm.

El triángulo def es equilátero y su lado es $\frac{1}{2}$ del lado del triángulo abc.



$\frac{7}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{2} =$

$\frac{7}{2} + \frac{7}{12} =$

$\frac{42}{12} + \frac{7}{12} = \frac{49}{12}$

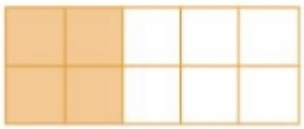
Perímetro = $\frac{49}{12}$ cm

33. Representen en una recta numérica las siguientes fracciones.

$\frac{1}{3}$; $\frac{7}{6}$; $\frac{5}{8}$ A cargo del alumno.

34. Indiquen la fracción irreducible que representa la parte sombreada.

a. $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

b.  $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

c. $\frac{1}{5}$

35. Completen los espacios vacíos en las siguientes igualdades.

a. $\frac{3}{5} = \frac{9}{15} = \frac{6}{10}$

b. $\frac{4}{7} = \frac{16}{28} = \frac{20}{35}$

c. $\frac{1}{2} = \frac{10}{20} = \frac{11}{22}$

36. Ordenen en forma decreciente las siguientes fracciones.

a. $\frac{2}{5}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{12}$ 3/4, 2/5, 1/12

b. $\frac{3}{7}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{10}{12}$ 10/12, 3/7, 1/8

c. $\frac{1}{2}$; $\frac{7}{16}$; $\frac{3}{2}$ 3/2, 1/2, 7/16

37. Calculen las operaciones sabiendo que...

$P = \frac{25}{36}$ y $Q = \frac{2}{3}$.

a. $\sqrt{P} + P : Q =$ 5/6 + 25/36 . 3/2 =15/8

b. $Q^2 + P =$ 4/9 + 25/36 = 16/36 + 25/36 = 41/36

c. $9P - Q =$ 25/4 − 2/3 = 75/12 − 8/12 = 67/12

d. $\sqrt{P} : Q^3 - 1 : Q =$ 5/6 : 8/27 − 3/2 = 5/6 . 27/8 − 3/2 = 45/16 − 24/16 = 21/16

38. Simplifiquen todo lo posible las siguientes fracciones.

a. $\frac{140}{630} =$ 2/9

b. $\frac{12}{132} =$ 1/11

c. $\frac{2\,400}{4\,800} =$ 1/2

d. $\frac{520}{624} =$ 5/6

39. Escriban en lenguaje simbólico y resuelvan.

a. El doble de la suma entre $\frac{1}{4}$ y $\frac{7}{8}$.
2 . (1/4 + 7/8) = 9/4

b. La diferencia entre la tercera parte de $\frac{1}{5}$ y la cuarta parte de $\frac{1}{6}$.
1/5 : 3 − 1/6 : 4 = 1/3 . 1/5 − 1/4 . 1/6 = 1/40

c. El cuadrado de la suma entre $\frac{1}{5}$ y 1, dividido $\frac{6}{5}$.
(1/5 + 1)² : 6/5 = (6/5)² : 6/5 = 6/5

d. La suma entre la raíz cuarta de $\frac{16}{625}$ y el cuadrado de $\frac{1}{5}$. $\sqrt[4]{16/625} + (1/5)^2 = 11/25$

40. Escriban en lenguaje algebraico y resuelvan.

a. $\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 =$ La suma entre el cubo de un medio y el cuadrado de un tercio. 17/72.

b. $\sqrt{\frac{9}{49}} + \frac{2}{7} =$ La suma entre la raíz cuadrada de 9/49 y dos séptimos. 5/7.

c. $\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{2} - 1\right) =$ La cuarta parte de la diferencia entre tres medios y uno. 1/8.

41. Resuelvan las operaciones combinadas.

a. $\frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right) + 2 : \frac{4}{3} - \frac{1}{8} =$ 37/24

b. $\sqrt{1 - \frac{9}{25}} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \frac{25}{2} =$ 13/10

c. $\left(1 + \frac{3}{7}\right) - \left(1 - \frac{3}{14}\right) + \left(\frac{5}{15} : \frac{10}{20}\right) =$ 55/42

d. $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)^2 + \sqrt[5]{\frac{32}{243}} + \left(\frac{9}{15}\right)^0 =$ 23/12

e. $\frac{3}{4} : \frac{9}{16} + \sqrt{\frac{1}{4}} - \frac{5}{6} =$ 1

42. Completen para que se verifique la igualdad.

a. $\frac{1}{3} : \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 4$

b. $\frac{10}{3} - \left(1 + \frac{1}{5}\right) = \frac{32}{15}$

c. $\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) \cdot \frac{8}{15} = \frac{2}{3}$

d. $\frac{7}{2} : \frac{14}{4} + \frac{2}{3} : \frac{6}{9} = 2$

43. **Resuelvan**

a. Un avión con 320 pasajeros parte de Buenos Aires hacia México, con escalas en Lima y en Bogotá. En la primera escala se baja $\frac{1}{8}$ de los pasajeros y suben 23 pasajeros nuevos. En la segunda escala se bajan $\frac{1}{3}$ de los pasajeros y suben 85 pasajeros nuevos. ¿Con cuántos pasajeros llega el avión a México?

El avión llegó a México con 287 pasajeros.

b. Andrés debe entregar el jueves un trabajo de Historia de 40 páginas. El lunes realizó $\frac{3}{8}$ del trabajo y el martes, $\frac{1}{5}$. ¿Qué parte del trabajo le falta?

Le faltan 17/40 partes del trabajo.

c. Lucas pidió un préstamo de dinero que deberá devolver en tres cuotas de la siguiente manera: $\frac{1}{4}$ en la primera cuota, $\frac{2}{6}$ en la segunda cuota y lo que resta en la última. ¿Qué fracción deberá pagar en la última cuota?

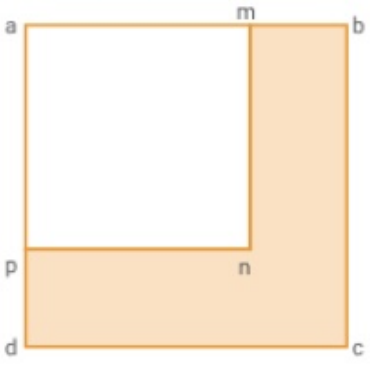
Si había pedido prestado $4800, ¿cuánto dinero devolverá en cada cuota?

Deberá pagar 5/12. En la 1ra: $1 200, en la 2da: $1 600 y en la 3ra: $3 000.

44. **Encuentren lo pedido en cada caso.**

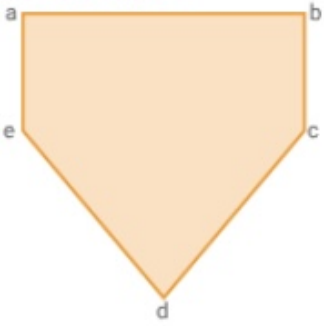
a. El perímetro de la figura sombreada, sabiendo que el área del cuadrado abcd es $\frac{169}{16}$ cm² y el área del cuadrado amnp es $\frac{49}{9}$ cm².

Perímetro = 13 cm



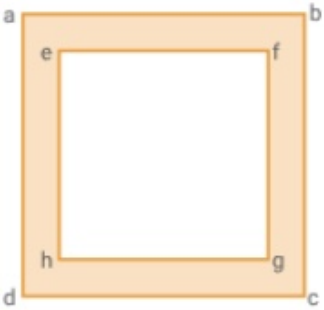
b. El perímetro de la figura sombreada, sabiendo que en el rectángulo abce la base mide $\frac{25}{6}$ cm y la altura mide $\frac{3}{5}$ de la base, y que el triángulo ecd es equilátero.

Perímetro = 35/2 cm



c. El área de la figura sombreada, sabiendo que el perímetro del cuadrado abcd es 7 cm y el del cuadrado efgh es 5 cm.

Área = 3/2 cm²



d. El perímetro de la figura sombreada, sabiendo que en el rectángulo abcd el lado $\overline{ab}$ mide 6 cm, el lado $\overline{bc}$ mide $\frac{2}{3}$ del lado $\overline{ab}$ y que el triángulo interior es equilátero, cuyo lado mide $\frac{3}{4}$ del lado $\overline{ad}$.

Perímetro = 29 cm

14. Fracciones y expresiones decimales

▶ SABERES DINÁMICOS

Una fracción representa la división entre dos cantidades enteras. Si se divide el numerador y el denominador, se obtiene la **expresión decimal de la fracción**.
Una **expresión decimal** está formada por una parte entera y una parte decimal que puede ser exacta (también llamada finita) o periódica.

Fracción	Expresión decimal	Tipo de expresión decimal
$\frac{7}{4}$	1,75	Expresión decimal exacta
$\frac{1}{3}$	0,333333...	Expresión decimal periódica

• Las expresiones decimales exactas se pueden escribir como **fracción decimal**.

Una **fracción decimal** es una fracción cuyo denominador es igual a la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene la expresión decimal que le corresponde.

Expresión decimal	Fracción decimal	Se lee
0,7	$\frac{7}{10}$	Siete décimos
1,25	$\frac{125}{100}$	Ciento veinticinco centésimos
0,006	$\frac{6}{1\,000}$	Seis milésimos

Una fracción irreducible tiene una **expresión decimal exacta** cuando los factores primos del denominador son potencias de 2, de 5 o de ambas.

$\frac{11}{50}$ es una fracción irreducible y su denominador se puede expresar $\frac{11}{2 \cdot 5^2} = 0{,}22$.

• Las expresiones decimales periódicas no se pueden escribir como una fracción decimal.

Para indicar el período de una expresión decimal se escribe un arquito sobre la parte decimal que se repite infinitamente.

$$\frac{2}{3} = 0{,}6666\ldots = 0{,}\overset{\frown}{6} \qquad \frac{111}{90} = 1{,}2333\ldots = 1{,}2\overset{\frown}{3}$$

Para comparar expresiones decimales se puede seguir el siguiente procedimiento.

Primero se compara la parte entera; si las partes enteras son iguales, se comparan los décimos. Si los décimos son iguales, se comparan lo centésimos, los milésimos, etc.

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen sus respuestas.

a. Escriban un ejemplo de una fracción cuya expresión decimal es exacta. Por ejemplo, 4/5 = 0,8.

b. Expliquen, sin hacer la división, por qué a la fracción $\frac{7}{45}$ le corresponde una expresión decimal periódica.
Porque el denominador, $45 = 5 \cdot 3^2$, no se puede expresar como factores primos de potencias de 2, de 5 o de ambas.

ApAp c. Confeccionen una tabla donde distingan expresiones decimales finitas y periódicas usando ejemplos. En cada caso den ejemplos de las fracciones irreducibles correspondientes.

Expresiones decimales finitas	Expresiones decimales periódicas
5/8 = 0,625	1/6 = 0,16666666...
1/5 = 0,2	1/30 = 0,0333333...

ACTIVIDADES

14. Fracciones y expresiones decimales

45. Completen la tabla según corresponda.

Fracción	Expresión decimal
$\frac{2}{5}$	0,4
$\frac{17}{10}$	1,7
$\frac{48}{200}$	0,24
$\frac{7}{1\,000}$	0,007

46. Escriban un ejemplo según lo pedido.

a. Una fracción irreducible cuya expresión decimal sea exacta. Por ejemplo $\frac{3}{5}$

b. Una fracción cuya expresión decimal sea periódica. Por ejemplo $\frac{2}{3}$

c. Una fracción decimal que represente más de un entero. Por ejemplo $\frac{7}{5}$

d. Una fracción decimal cuya expresión decimal tenga parte entera igual a seis. Por ejemplo $\frac{37}{6}$

47. Ordenen de mayor a menor los siguientes números decimales.

0,23 1,789 $0,\overline{5}$ 0,001 $1,8\overline{2}$ 2,01 1,5

2,01 – $1,8\overline{2}$ – 1,789 – $1,\overline{5}$ – 0,5 – 0,23 – 0,001

48. Ordenen de menor a mayor los siguientes números.

1,5 $\frac{2}{10}$ $1\frac{1}{4}$ 0,25 $\frac{2}{9}$ $0,\overline{3}$ $2\frac{1}{8}$

0,2 – 2/9 – 0,25 – $0,\overline{3}$ – 1 1/4 – 1,5 – 2 1/8

49. Escriban V (verdadero) o F (falso) y expliquen sus respuestas.

a. $0,9 < 0,89$ F

b. $\frac{2}{10} > 0,02$ V

c. $0,\overline{3} = \frac{3}{10}$ F

d. $0,06 < 0,6$ V

a. 0,9 > 0,89 porque la cifra de los décimos del primer número es mayor que la cifra de los décimos de la segunda.
b. Porque 2/10 es equivalente a 0,2.
c. Porque 3/10 es equivalente a 0,3 y no es equivalente a 0,333333...
d. Porque la primera expresión tiene una cifra menor en la posición de los décimos comparada con la cifra de los décimos de la segunda.
e. Porque la parte decimal de la primera expresión es diferente a la de la segunda.
f. Las expresiones son equivalentes, 9/20 = 0,45.
g. 8/9 = $0,\overline{8}$, es decir no es una expresión decimal finita.
h. 1/10 = 0,1 y 1/9 = $0,\overline{1}$.

e. $4,1\overline{8} = 4,\overline{18}$ F

f. $0,45 = \frac{9}{20}$ V

g. $0,8 = \frac{8}{9}$ F

h. $\frac{1}{10} > \frac{1}{9}$ F

50. Completen con una expresión decimal que se encuentre entre los números dados.

a. 0,7 0,75 $\frac{4}{5}$

b. $\frac{3}{10}$ 0,35 $\frac{4}{10}$

c. $1,\overline{2}$ 1,225 1,23

d. 0,89 0,895 $\frac{45}{50}$

e. 3,33 3,333 $3,\overline{33}$

f. $\frac{1}{9}$ 0,4 $\frac{1}{2}$

15. Operaciones con decimales. Operaciones combinadas

▶ SABERES DINÁMICOS

Suma y resta

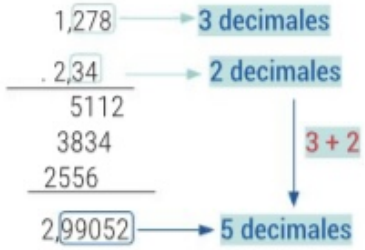
Para **sumar y restar** números decimales exactos se deben escribir en columna haciendo coincidir las partes enteras, la coma y las cifras decimales; luego se resuelve. En aquellos casos que falten cifras, se deben completar con ceros.

Suma	Resta
2,36 + 1,189	5,289 − 2,768
2,360 + 1,189 3,549	5,289 − 2,768 2,521

Multiplicación

Para **multiplicar** dos números decimales exactos, se multiplican como si fuesen números enteros y, luego, para colocar la coma en el resultado se cuentan tantas cifras decimales como tenga la suma de los lugares decimales de los factores.

1,278 x 2,34



Cuando se **multiplica una expresión decimal exacta por 10, 100, 1 000, etc.**, se corre la coma hacia la derecha tantos lugares como ceros tenga el 10, 100, 1 000, etc.

3,35 . 10 = 33,5 1,789 . 100 = 178,9 23,5 . 1 000 = 23 500

División

Cuando se **divide una expresión decimal exacta por 10, 100, 1 000, etc.**, se corre la coma hacia la izquierda tantos lugares como ceros tenga el 10, 100, 1 000, etc.

17,68 : 10 = 1,768 25,11 : 100 = 0,2511 54 263,7 : 1 000 = 54,2637

Para **dividir** dos números decimales exactos, se deben multiplicar el dividendo y el divisor por 10, 100, 1 000 hasta transformar el divisor en un número natural y, luego, se resuelve la división.

Para **calcular la potencia o raíz de una expresión decimal**, se puede escribir la forma fraccionaria de la expresión y luego se resuelve la operación. Luego, se puede expresar en forma decimal la fracción obtenida como resultado.

$0{,}5^2 = \left(\frac{5}{10}\right)^2 = \frac{25}{100} = 0{,}25$ $\sqrt[3]{0{,}064} = \sqrt[3]{\frac{64}{1\,000}} = \frac{4}{10} = 0{,}4$

15. Operaciones con decimales. Operaciones combinadas

Operaciones combinadas con decimales

Para resolver las **operaciones combinadas** con números decimales, se debe separar en términos y respetar la jerarquía de las operaciones de la misma manera que se hace con los números naturales y fraccionarios.

$0{,}12 \cdot 2{,}3 + 7{,}23 : 1{,}2 =$ Se separa en términos.

$0{,}276 + 6{,}025 = 6{,}301$ Se resuelve cada término y se calcula el resultado.

En algunas ocasiones, para resolver una operación combinada con números decimales conviene transformar los números a fracciones y resolver. Luego, se puede expresar el resultado obtenido con su expresión decimal.

$2{,}5 \cdot (1{,}2 + \sqrt{0{,}09}) + 0{,}5^3 =$ Se separa en términos.

$\frac{25}{10} \cdot \left(\frac{12}{10} + \sqrt{\frac{9}{100}}\right) + \left(\frac{5}{10}\right)^3 =$ Se transforman los números decimales en fracciones decimales.

$\frac{5}{2} \cdot \left(\frac{6}{5} + \frac{3}{10}\right) + \frac{1}{8} =$ Se resuelven las operaciones.

$\frac{15}{4} + \frac{1}{8} = \frac{31}{8} = 3{,}875$ Se transforma el resultado a número decimal.

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen sus respuestas.
   a. Si un número es multiplicado por 1,26 y da como resultado un número con 5 cifras decimales, ¿cuántas cifras decimales tiene ese número? El número tiene 3 cifras decimales.
   b. ¿Cuál es el resultado de 4,51 . 10 000? El resultado es 45 100.

ApAp

   c. Escriban otro ejemplo para cada tipo de operación con decimales. A cargo del alumno.

ACTIVIDADES

15. Operaciones con decimales. Operaciones combinadas

51. Completen la siguiente tabla.

. 100	Número decimal	: 10
1 289,9	12,899	1,2899
198,7	1,987	0,1987
13 234	132,34	13,234
78	0,78	0,078
920	9,20	0,92
1 165,5	11,655	1,1655

15. Operaciones con decimales. Operaciones combinadas

52. Unan con el resultado correspondiente.

a. 1,2 . 2,1 + 0,25 = • 26,75
b. 2,6 : 1,3 − 0,12 = • 2,77
c. 12,5 + 16,25 − 1 : 0,5 = • 1,88
d. (3,2 + 1,5) . 1,1 = • 5,17

TracO

53. Resuelvan trabajando con un compañero.

a. Uno de los integrantes debe resolver las multiplicaciones.

- 12,3 . 3,1 = 38,13
- 1,23 . 0,31 = 0,3813
- 0,123 . 0,31 = 0,03813
- 123 . 0,031 = 3,813

b. El otro integrante debe unir con flechas con el resultado correspondiente, sin resolverlas.

- 12,3 . 3,1 = • 0,03813
- 1,23 . 0,31 = • 3,813
- 0,123 . 0,31 = • 38,13
- 123 . 0,031 = • 0,3813

c. ¿Llegaron a los mismos resultados? A cargo de los alumnos.

54. Resuelvan.

a. $0,2^2$ = 0,04
b. $1,2^2$ = 1,44
c. $0,5^3$ = 0,125
d. $1,1^3$ = 1,331
e. $\sqrt{0,49}$ = 0,7
f. $\sqrt{1,69}$ = 1,3
g. $\sqrt[3]{0,027}$ = 0,3
h. $\sqrt[4]{0,0001}$ = 0,1

55. Escriban V (verdadero) o F (falso).

a. $(1 - 0,6)^0 = 0,6$ El resultado correcto es 1. F
b. $\sqrt{(0,25 + 0,01)} = 0,5 + 0,1$ No es distributiva la radicación con la suma. F
c. $\sqrt[3]{\frac{0,001}{0,008}} = \frac{0,1}{0,2}$ V
d. $(0,1 \,.\, 1,3)^2 = 0,01 \,.\, 1,69$ V

Operaciones con decimales. Operaciones combinadas

Resuelvan los siguientes cálculos en forma decimal.

a. 2,3 + 6,7 − 1,45 =

1,45 = 17,55

b. 4,7 − (2, 67 + 15,98) =

− 18,65 = 46,05

c. 2 . (33,6 + 17,82) − 45, 6 =

2 . 51,42 − 45,6 =

102,84 − 45,6 = 57,24

d. 276,9 − (2,5 − 23,99) =

276,9 − (−21,49) =

276,9 + 21,49 = 298,39

e. 12,34 . 4,5 + 8,3 =

55,53 + 8,3 = 63,83

f. 3,4 + 6,4 : 3,2 =

3,4 + 2 = 5,4

g. 125,5 : 0,2 + 77,8 =

125,5 . 5 + 77,8 =

627,5 + 77,8 = 705,3

h. 678,42 − 7,8 . 12,3 =

678,42 − 95,94 = 582,48

57. Escriban dos ejemplos de cada uno.

a. Una fracción cuya expresión decimal sea igual a 1,75. Por ejemplo: 7/4, 14/8.

b. Una fracción cuya expresión decimal sea igual a 0,25. Por ejemplo: 1/4, 5/20.

58. Resuelvan los siguientes cálculos, transformando previamente los números decimales a fracciones. Expresen el resultado como número decimal.

a. $(1 - 0{,}8)^2 + 2 \,.\, \sqrt{0{,}16} + 0{,}6^0 =$

(1 − 4/5)2 + 2 .√16/100 + 1 =

1/25 + 4/5 + 1 = 46/25 = 1,84

b. $\sqrt{(1 + 5 \,.\, 0{,}2^2 + 0{,}1^2)} - (0{,}45 : 1{,}5 - 0{,}4) =$

√121/100 − (9/20 : 3/2 − 2/5) =

11/10 + 1/10 = 6/5 = 1,2

c. $(\sqrt{1{,}21} + \sqrt[3]{0{,}027}) + (1 - 0{,}5) \,.\, (1 - 0{,}8) =$

11/10 + 3/10 + 1/2 . 1/5 =

14/10 + 1/10 = 3/2 = 1,5

d. $(12{,}3 - 1{,}2) \,.\, (\sqrt{0{,}01} + 1{,}3) - 0{,}1 =$

111/10 . (1/10 + 13/10) − 1/10 =

111/10 . 14/10 − 1/10 = 386/25 = 15,44

59. Resuelvan y escriban la respuesta.

a. Un paciente debe tomar 0,1 g de un medicamento cada 8 horas. Si solo tiene comprimidos de 0,05 g cada uno, ¿cuántos debe tomar por día?

3 . (0,1 : 0,05) = 3 . (1/10 . 100/5) = 3 . 2 = 6

Por día deberá tomar 6 comprimidos de 0,05 g cada uno.

b. Julia fue a la perfumería y compró tres jabones de tocador a $32,50 cada uno, una esponja a $45,25, una crema de enjuague a $125,50 y dos esmaltes de uñas a $95,25 cada uno. Si pagó con un billete de $1 000, ¿cuánto recibió de vuelto?

1 000 − (3 . 32,50 + 45,25 + 125,50 + 2 . 95,25) = 1 000 − (97,50 + 45,25 + 125,50 + 190,50) =

1 000 − 458,75 = 541,25 Julia recibió de vuelto $541,25.

16. Aproximación y porcentaje

▶ SABERES DINÁMICOS

Aproximación

En muchos casos es útil considerar una expresión decimal aproximada para poder resolver operaciones o porque no es necesario considerar todas sus cifras decimales.

Se puede aproximar **por redondeo o por truncamiento**.

Para **aproximar por redondeo** una expresión decimal hay que determinar a qué cifra decimal se aproximará y observar la cifra decimal siguiente.

Si la cifra siguiente **es mayor o igual a 5**, se le suma uno a la cifra considerada y se elimina el resto de las cifras.	Si la cifra siguiente **es menor a 5**, se deja igual a la cifra considerada y se elimina el resto de las cifras.
0,58 aproximado a los décimos es 0,6 *1,465 aproximado a los centésimos es 1,47*	*0,13 aproximado a los décimos es 0,1* *8,272 aproximado a los centésimos es 8,27*

Para **aproximar por truncamiento** se eliminan las cifras que están a la derecha de la cifra considerada.

34,561 aproximado a los décimos por truncamiento es 34,5
34,561 aproximado a los centésimos por truncamiento es 34,56

Porcentaje

El **porcentaje** se usa para definir la relación entre una parte y un total representando esa cantidad para el caso de que el total sea 100.

68% se lee *sesenta y ocho por ciento* y representa $\frac{68}{100}$.

El porcentaje de una cantidad indica una proporción del total.
Para calcularlo se expresa el porcentaje en fracción y luego se calcula la fracción de la cantidad.

El 25% de los 148 alumnos de una escuela vive a más de 30 cuadras. ¿Cuántos alumnos representan esa cantidad?

25% de 148 $\frac{25}{100} \cdot 148 = 37$

37 alumnos representan el 25% de los 148 alumnos.

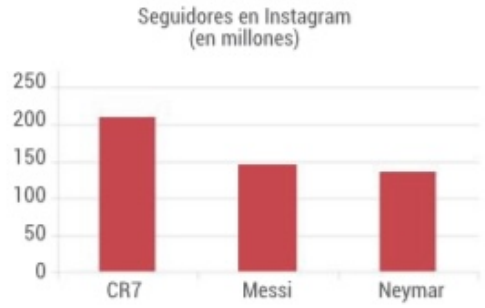
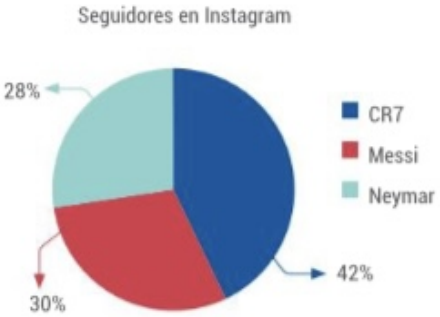
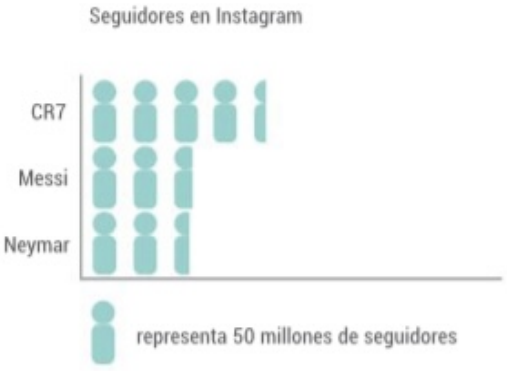
Áreas dinámicas [Matemática y Ciencias Naturales]

Desde 2006 la ANMAT (Administración Nacional de Medicamentos, Alimentos y Tecnología) estableció los datos obligatorios que deben informar las etiquetas de los alimentos. Así, el consumidor dispone de más información sobre las propiedades de esos productos y puede llevar una dieta más sana y equilibrada. En las etiquetas se encuentra toda la información nutricional que incluye la cantidad de energía y nutrientes y el porcentaje de valores diarios recomendado basado en una dieta de 2 000 calorías.
El valor diario de cada persona puede variar según sus necesidades calóricas y para calcularlo es necesario saber porcentaje.

16. Aproximación y porcentaje

Gráficos

Los datos obtenidos se pueden volcar en gráficos. Existen distintos tipos de gráficos.

Gráfico de barras	Es un gráfico que organiza las categorías en el eje horizontal y la altura de cada barra representa los valores que toma cada una. Permite comparar fácilmente los datos.	
Gráfico circular	Es un gráfico cuya representación corresponde a un diagrama de sectores circulares donde cada parte representa un porcentaje del total.	
Pictograma (o gráfico de imágenes)	Es un gráfico donde las cantidades se representan a través de imágenes o símbolos. Permite interpretar fácilmente la información.	

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen sus respuestas.
   a. Al aproximar por truncamiento ¿se puede obtener un número mayor? ¿Y al aproximar por redondeo?
   b. ¿Cuánto es el 10% del 20% de 100? No. Sí, cuando la cifra siguiente a la considerada es mayor o igual que 5.
   c. ¿Es cierto que el 50% de una cantidad equivale a su mitad? El 25%, ¿a qué equivale? 10/100 · 20/100 · 100 = 2

Sí, el 50% de una cantidad equivale a su mitad, porque 50% = 50/100 = 1/2. El 25% de una cantidad equivale a su cuarta parte, porque 25% = 25/100 = 1/4.

ApAp

ACTIVIDADES

16. Aproximación y porcentaje

60. Completen la siguiente tabla, aproximando a centésimos, según corresponda.

Número decimal	Aproximación por redondeo	Aproximación por truncamiento
1,987	1,99	1,98
0,016	0,02	0,01
12,834	12,83	12,83
7,889	7,89	7,88
423,671	423,67	423,67
0,025	0,03	0,02

61. Escriban un ejemplo que cumpla lo pedido.

a. 3,46 es la aproximación por redondeo de Por ejemplo, 3,457.

b. 0,9 es la aproximación por truncamiento de Por ejemplo, 0,97.

c. 12,88 es la aproximación por redondeo de Por ejemplo, 12,876.

d. 5,79 es la aproximación por truncamiento de Por ejemplo, 5,798.

62. Escriban el cálculo de los siguientes porcentajes y resuelvan.

a. 20% de 45 20/100 . 45 = 0,20 . 45 = 9

b. 60% de 1 000 60/100 . 1 000 = 0,60 . 1 000 = 600

c. 75% de 180 75/100 . 180 = 0,75 . 180 = 135

d. 100% de 650 100/100 . 650 = 1 . 650 = 650

e. 45% de 75 45/100 . 75 = 0,45 . 75 = 33,75

f. 35% de 90 35/100 . 90 = 0,35 . 90 = 31,5

g. 80% de 200 80/100 . 200 = 0,80 . 200 = 160

h. 90% de 9 90/100 . 9 = 0,90 . 9 = 8,1

63. Calculen mentalmente y completen.

a. 50 % de 800 = $\frac{50}{100}$. 800 = 400

b. 75 % de 60 = $\frac{75}{100}$. 60 = 45

c. 25 % de 440 = $\frac{25}{100}$. 440 = 110

d. 50 % de 132 = $\frac{50}{100}$. 132 = 66

64. Completen con el porcentaje correspondiente.

a. 33 es el 50 % de 66.

b. 18 es el 10 % de 180.

c. 25 es el 25 % de 100.

d. 12 es el 20 % de 60.

e. 75 es el 30 % de 250.

f. 306 es el 85 % de 360.

65. Escriban el número pedido en cada caso.

a. El 25% de 2,35 redondeado a décimos. 1/4 . 2,35 = 0,5875, redondeado a décimos es 0,6.

b. La mitad de 1,284 redondeado a centésimos. 1,284 : 2 = 0,642, redondeado a centésimos es 0,64.

c. El 50% de 12,36 truncado a décimos. 1/2 . 12,36 = 6,18, truncado a los décimos es 6,1.

d. La cuarta parte de 1,248 truncado a los centésimos. 1/4 . 1,248 = 0,312 truncado a los centésimos es 0,31.

ACTIVIDADES

16. Aproximación y porcentaje

66. Realicen, con los datos dados en cada caso, el gráfico correspondiente.

a. Raúl registró cada día la cantidad de velas artesanales vendidas.

Día	Cantidad de velas
Lunes	16
Martes	25
Miércoles	18
Jueves	20
Viernes	21

Gráfico de barras

b. Laura calculó a qué porcentaje de sus amigos les gustan los siguientes ritmos musicales.

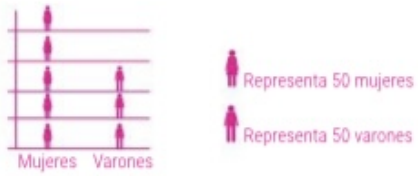
Ritmo	Porcentaje (%)
Rock	25
Rap	10
Trap	15
Cumbia	25
Reggaeton	25

Gráfico circular

c. Sergio registró la cantidad de mujeres y varones que hay en una escuela.

Sexo	Cantidad
Femenino	250
Masculino	150

Pictograma



67. Indiquen si las siguientes afirmaciones son correctas. Expliquen sus respuestas.

a. Si un producto costaba $200 y aumentó un 100%, para que vuelva al valor original habría que hacer un descuento del 50%.

Correcta. Aumentar un 100% equivale a que el nuevo precio sea de $400, si a este precio se le hace un descuento del 50% entonces se vuelve al precio original de $200.

b. Para calcular el 40% de 370 se puede hacer 0,40 . 370.

Correcta. El 40% equivale a 40/100 cuya expresión decimal es 0,40.

c. El 25% de una cantidad equivale a la cuarta parte de esa cantidad.

Correcta. El 25% es equivalente a 25/100 de esa cantidad, es decir, 1/4 de esa cantidad.

d. Calcular el 70% de una cantidad equivale a multiplicar esa cantidad por $\frac{100}{90}$.

Incorrecta. El 70% de una cantidad es equivalente a multiplicarla por 70/100.

e. La mitad de una cantidad equivale al 50% de esa cantidad.

Correcta. El 50% de una cantidad es equivalente a 50/100, es decir, 1/2 de esa cantidad.

16. Aproximación y porcentaje

68. Lean atentamente y respondan.

a. Julián le contó a un amigo que terminó un trabajo en tres días, de la siguiente manera: el primer día hizo el 38%; el segundo día, el 32% y el último día, el 33%. ¿Es correcto lo que contó Julián?

No es correcto, porque al sumar los porcentajes, estos exceden el 100%.

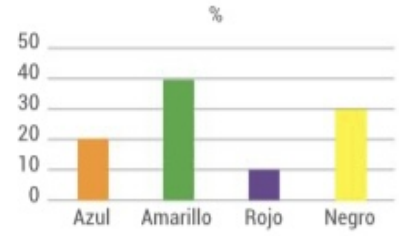
b. Lucía pintó las paredes de su habitación en cuatro días. El primer día pintó un 20%; el segundo día pintó $\frac{1}{5}$; el tercer día, un 50% y el último día, $\frac{1}{10}$. ¿Es posible? ¿Por qué?

Sí, es posible, porque al sumar las cantidades suman 100%, es decir, 1.

c. En un grupo de 40 personas, el 10% habla alemán, la mitad habla inglés y el resto, francés. ¿Cuántas personas hablan cada idioma?

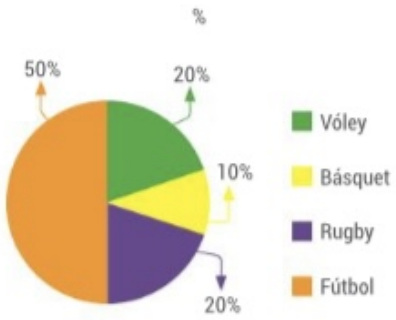
En el grupo 4 personas hablan alemán, 20, inglés y 16, francés.

69. Los gráficos representan los resultados de encuestas a 150 personas. Resuelvan.



a. ¿Cuál es el color preferido entre el azul, el rojo, el amarillo y el negro?

El color preferido es el amarillo.



b. ¿Cuál deporte gusta más entre el fútbol, el vóley, el rugby y el básquet?

El deporte que más gusta es el fútbol.

c. Completen teniendo en cuenta los gráficos anteriores.

- El 20 % de las personas encuestadas prefiere el color azul.
- El 40 % de las personas prefiere el color amarillo y esto equivale a 60 personas.
- 45 personas prefieren el color negro.
- 30 personas prefieren el color azul.
- Al 50 % le gusta más el fútbol.
- Al 10 % le gusta más el básquet y esto equivale a 15 personas.
- A 75 personas les gusta el fútbol.
- A 30 personas les gusta el vóley.
- A 30 personas les gusta el rugby.

16. Aproximación y porcentaje

70. Resuelvan los siguientes cálculos.

a. El 85% de 100 + el 20% de 60 =

85/100 . 100 + 20/100 . 60 = 85 + 12 = 97

b. El 10% de 77 + el 120% de 60 =

10/100 . 77 + 120/100 . 60 = 7,7 + 72 = 79,7

c. El 75% de 200 − el 8% de 800 =

75/100 . 200 − 8/100 . 800 = 150 − 64 = 86

d. El 245% de 50 + el 90% de 100 =

245/100 . 50 + 90/100 . 100 = 122,5 + 90 = 212,5

71. Completen la tabla.

Porcentaje	Fracción	Fracción irreducible	Expresión decimal
20%	20/100	1/5	0,20
25%	25/100	1/4	0,25
50%	50/100	1/2	0,50
75%	75/100	3/4	0,75

PenCrit

72. Lean atentamente y respondan.

Marcelo debe comprar 12 botellas de agua mineral marca "Sureña" en un supermercado. Se ofrecen estas dos promociones.

Supermercado LUNA
Agua mineral
"**Sureña**"
Cada una
$87,20
Promoción 3x2

Supermercado La Flor
Agua mineral
"**Sureña**"
$88,50 c/u
Comprando 12 unidades
Descuento del 35%

¿En cuál supermercado le conviene comprar?

Le conviene comprar en Supermercado La Flor, ya que debería pagar $690,30 y si compra en Luna debería pagar $697,60.

73. Planteen y resuelvan.

a. El perímetro del cuadrado abcd es 50,4 cm. Calculen el perímetro de otro cuadrado cuyos lados miden un 25% más que los del cuadrado abcd.

50,4 : 4 = 12,6; 4 . (12,6 + 0,25 . 12,6) = 4 . (12,6 + 3,15) = 4 . 15,75 = 63

El perímetro del otro cuadrado es 63 cm.

b. Un paciente debe cumplir una dieta de 2 500 calorías por día con la siguiente especificación: 40% del total corresponde a carbohidratos; el 35%, a grasas y el 25%, a proteínas. ¿Cuántas calorías corresponden a cada categoría?

40/100 . 2 500 = 1 000; 35/100 . 2 500 = 875; 25/100 . 2 500 = 625.

A carbohidratos 1 000 calorías, a grasas 875 calorías y a proteínas 625 calorías.

DinámicaMente

Lean lo que dice Micaela y debatan con un compañero si es correcto.

"Al calcular un descuento del 20% de una cantidad y luego aplicar otro descuento del 20% se obtiene el mismo resultado que al calcular directamente un descuento del 40%." No es correcto. Aplicar dos veces un 20% es aplicar un 4% (20/100 . 20/100 = 4/100).

Integración final

74. Escriban cada fracción como número decimal y luego ordenen de menor a mayor.

$\frac{1}{4}; \frac{12}{5}; \frac{7}{10}; \frac{3}{2}; \frac{11}{20}$ 0,25 - 0,55 - 0,7 - 1,5 - 2,4

75. Escriban los siguientes números decimales como fracciones irreducibles.

a. 24,5 = $\frac{49}{2}$

b. 11,75 = $\frac{47}{4}$

c. 0,85 = $\frac{17}{20}$

d. 5,25 = $\frac{21}{4}$

e. 0,6 = $\frac{3}{5}$

76. Completen con <, > o =.

a. $\frac{7}{8}$ < 0,98

b. $\frac{3}{5}$ = 0,6

c. $\frac{27}{9}$ < 3,25

d. $\frac{1}{2}$ = 0,5

e. $\frac{55}{11}$ > 3,2

77. Resuelvan las siguientes operaciones.

a. $2{,}34 + 0{,}5^2 + \sqrt{0{,}04} =$ 2,79

b. $\sqrt[3]{0{,}001} + \sqrt{0{,}09} =$ 0,4

c. $3 \cdot 2{,}5^0 - 1{,}2^2 =$ 1,56

d. $12{,}5 \cdot 6{,}7 - 2{,}4 : 1{,}2 =$ 81,75

e. $6 - (4{,}5 - 3{,}6) \cdot (8{,}7 - 2{,}9) + 5 =$ 5,78

78. Calculen.

a. El 20% del 5% de 120. 1,2

b. El 40% del 30% de 90. 10,8

c. El 10% del 10% de 800. 8

d. El 65% del 35% de 700. 159,25

e. El 28% del 14% de 1 400. 54,88

f. El 100% del 50% de 12. 6

79. Completen la tabla.

Número decimal	Aproximación por redondeo al entero	Aproximación por redondeo a los décimos
511,23	511	511,2
45,67	46	45,7
7,88	8	7,9
134,64	135	134,6
1 322,48	1 322	1 322,5

80. Transformen en fracción los números decimales y resuelvan.

a. $0{,}8 \cdot 0{,}5 + (1{,}5)^2 - 1 : 0{,}4 =$ 3/20 = 0,15

b. $\sqrt{1 - 0{,}96} + 0{,}2 - 0{,}4 =$ 0

c. $\sqrt{(1{,}5 \cdot 0{,}4 + 1{,}2) : 1{,}8 + (0{,}3)^2} =$ 109/100 = 1,09

d. $(1{,}1 - 0{,}1)^3 + 2{,}5 : 0{,}5 - 0{,}4 : 2 =$ 29/5 = 5,8

e. $(\sqrt[3]{0{,}027} + 0{,}7) \cdot 1{,}25 - 0{,}75 =$ 1/2 = 0,5

81. Indiquen cuál es la cantidad en cada caso.

a. El 25% de una cantidad es 360. 1 440

b. El 10% de una cantidad es 74. 740

c. El 75% de una cantidad es 18. 24

d. El 56% de una cantidad es 154. 275

e. El 86% de una cantidad es 43. 50

82. Escriban en lenguaje simbólico y resuelvan.

a. La suma entre el 10% de 80 y la tercera parte de 33.
10/100 . 80 + 1/3 . 33 = 19

b. El doble de la diferencia entre el 20% de 50 y el 5% de 40. 2 . (20/100 . 50 − 5/100 . 40) = 16

d. El producto entre el 20% de 105 y el 5% de 60.
20/100 . 105 . 5/100 . 60 = 21 . 3 = 63

c. El cociente entre el 25% de 128 y el 8% de 8.
25/100 . 128 : (8/100 . 8) = 32 : 0,64 = 50

83. Completen la tabla resolviendo mentalmente.

. 100	Número decimal	: 10
12 358	123,58	12,358
830	8,30	0,83
74 117	741,17	74,117
7 510	75,1	7,51
1500	15	1,5

84. **Planteen y resuelvan.**

a. El pasillo de la casa de Juan tiene 7,8 m de largo. ¿Cuántos pasos tendrá que dar Juan para recorrerlo, si cada uno de sus pasos mide 0,65 m?
Juan tendrá que dar 12 pasos para recorrer el pasillo de su casa.

b. Luis compró 2 kg de pan en una panadería que cobra $110,50 el kilo. Como había una promoción por llevar esa cantidad, le hicieron un 15% de descuento. ¿Cuánto pagó en total?
Luis pagó en total $187,85.

c. A un taller de cerámica al que asisten 16 personas faltaron a la última clase 2 personas. ¿Qué porcentaje estuvo presente?
Estuvo presente el 87,5%.

d. Andrés fue a la verdulería y compró 3 kilos de manzana a $95,75 el kilo, 2 kilos de banana a $105,25 el kilo y 1 kilo de tomate a $75. Si pagó con un billete de $1 000, ¿cuánto recibió de vuelto?
Andrés recibió de vuelto $427,25.

e. Lucrecia quiere alfombrar su dormitorio, y el precio por metro cuadrado de la alfombra que le gusta es de $875,50. Si el piso de su dormitorio mide 3 m por 2,5 m, ¿cuánto le costará alfombrarlo?
Le costará $6 566,25.

85. **Resuelvan y respondan.**

El lado $\overline{ab}$ mide 6 cm.

Si el lado del cuadrado mnop mide 50% más que el lado del cuadrado abcd:

a. ¿Qué porcentaje aumenta su perímetro?

b. ¿Qué porcentaje aumenta su área?

a. El perímetro aumenta un 50%, es decir el perímetro nuevo es el 150% del perímetro original.
b. El área aumenta un 125%, es decir el área nueva es el 225% del área original.

86. **Escriban V (verdadero) o F (falso). Expliquen las respuestas.**

a. Una fracción con denominador 10 es una fracción decimal. Porque su denominador es 10. V

b. Toda fracción puede escribirse como número decimal exacto. F
Por ejemplo, la fracción 2/3 no tiene expresión decimal exacta.

c. El porcentaje puede transformarse en una fracción con denominador 100. V
Por ejemplo, el 40% de 200 se puede expresar como 40/100 . 200.

d. Calcular el 75% de una cantidad equivale a calcular $\frac{3}{4}$ de la cantidad. V
Porque el 75% es equivalente a la fracción 75/100 cuya expresión irreducible es 3/4.

87. **Observen el pictograma e indiquen si las afirmaciones son correctas. Expliquen usando cálculos, cuando sea necesario.** PenCrit

a. Entre 1990 y 2015 la población aumentó aproximadamente un 37,74%. Correcta

b. Entre 2030 y 2100 la población aumentará aproximadamente un 31,76%. Correcta

c. Entre 2015 y 2030 la población aumentará 1 200 millones y lo mismo entre 2030 y 2050; por eso el porcentaje de población que aumenta en cada uno de esos períodos es el mismo. Incorrecta

d. La información dada por el pictograma es incorrecta porque el aumento entre 1990 y 2100 supera el 100%. Incorrecta

3 Funciones

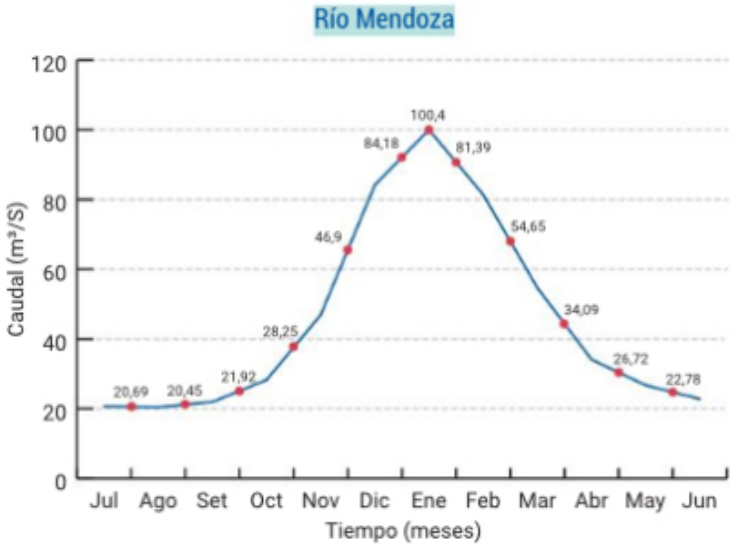
17. Gráficos y tablas

▶ SABERES DINÁMICOS

Los **gráficos** permiten leer con mayor facilidad los datos de una situación.

El siguiente gráfico muestra la variación del caudal del río Mendoza durante un año; es decir, cómo varía el caudal del río en función del tiempo.

Las cantidades que se representan en los gráficos se llaman **variables**. En este caso las variables son el caudal y el tiempo.



- En el eje horizontal se representaron los meses del año. En el eje vertical, el caudal en m^3/s.
- El caudal máximo registrado fue de 100,4 m^3/s en el mes de enero. Y el caudal mínimo registrado fue de 20,45 m^3/s en el mes de agosto.
- Se puede observar que entre los meses de octubre y enero el caudal fue en aumento.
- También se observa que entre enero y junio el caudal disminuyó.

En la siguiente **tabla** se representa el caudal medio de cada mes del río Mendoza durante un año.

Mes	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun
Caudal (m^3/s)	20,69	20,45	21,92	28,25	46,9	84,18	100,4	81,39	54,65	34,09	26,72	22,78

Áreas dinámicas [Matemática y Ciencias Sociales]

Los hidrogramas son tipos de gráficos que sirven para representar la variación en el tiempo de alguna información hidrológica como el caudal de un río, el nivel de agua, etc. El gráfico del ejemplo de esta página es un hidrograma.

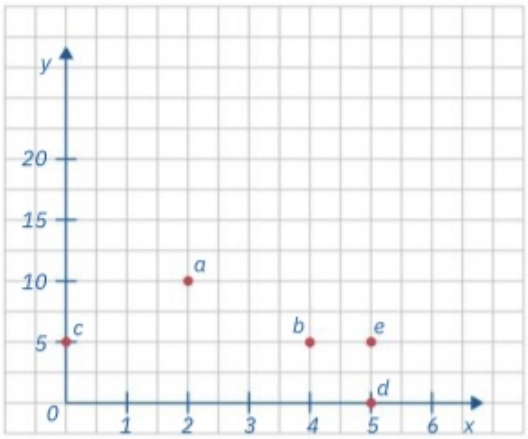
17. Gráficos y tablas

Sistema de ejes cartesianos

• Un **sistema de ejes cartesianos** está formado por dos rectas perpendiculares que se cortan en un punto llamado **origen de coordenadas**. El gráfico de la variación del caudal del río Mendoza se realizó sobre un sistema de ejes cartesianos.

• La recta horizontal se denomina **eje de abscisas** (eje x) y la vertical, **eje de ordenadas** (eje y). En nuestro ejemplo, el tiempo (en meses) se representó en el eje x y el caudal (en m^3/s) sobre el eje y.

• Cada **punto** queda determinado por un par ordenado de valores, donde el primero representa la **abscisa** y el segundo, la **ordenada**.



a = (2;10) b = (4;5) c = (0;5) d = (5;0) e = (5;5)
Para ubicar estos puntos se tomaron distintas unidades en cada eje.

Los puntos representados se pueden organizar en una tabla como la siguiente.

x	y
2	10
4	5
0	5
5	0
5	5

TEST DE COMPRENSIÓN

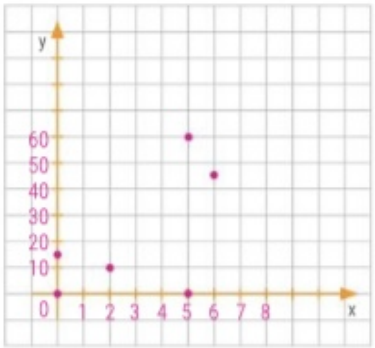
1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. ¿Todos los puntos de abscisa 0 están ubicados sobre el eje y? Sí.
   b. El punto (2;5), ¿es igual al punto (5;2)? No, el primer valor corresponde a la abscisa y el segundo, a la ordenada.
   ApAp c. Den tres ejemplos de situaciones que se pueden representar mediante un sistema de ejes cartesianos. Las variables independientes suelen ser cantidades, altura, peso, etc. Las variables dependientes suelen ser tiempo, precio, cantidades, etc. Por ejemplo, distancia recorrida por un móvil en función del tiempo.

ACTIVIDADES

17. Gráficos y tablas

1. Representen los puntos de la tabla en un sistema de ejes cartesianos utilizando la escala que consideren adecuada.

x	y
2	10
5	0
0	15
0	0
6	45
5	60



17. Gráficos y tablas

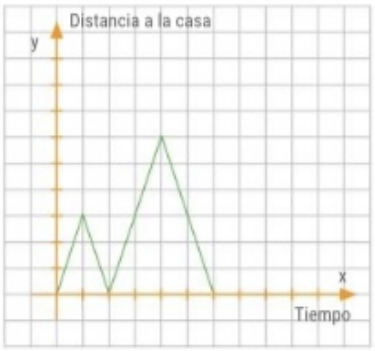
2. Lean las siguientes situaciones y completen en el gráfico con la letra del ítem correspondiente.

a. Marcos sale de su casa, está un rato en el polideportivo y regresa.

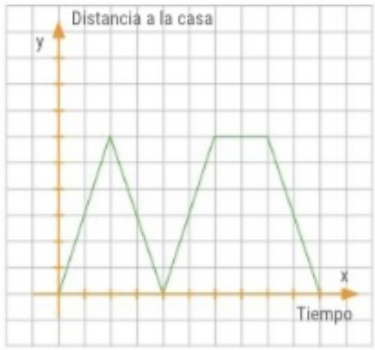
b. Juan sale de su casa. A mitad de camino recuerda que no lleva zapatillas de deportes; vuelve a casa, regresa al polideportivo y retorna a su casa.

c. Matías sale de su casa, está un rato en el polideportivo y comienza a volver. A mitad de camino encuentra a una amiga con la que se queda charlando unos minutos. Luego, continúa hasta llegar a su casa.

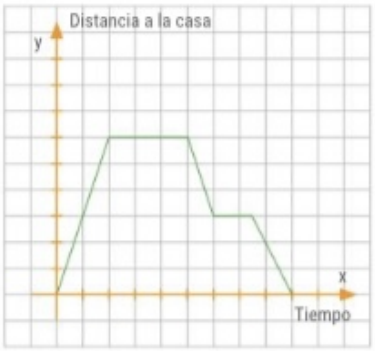
d. Javier sale de su casa. Cuando llega al polideportivo se da cuenta que se olvidó la pelota; vuelve a casa y regresa al polideportivo. Después de un rato retorna a su casa.



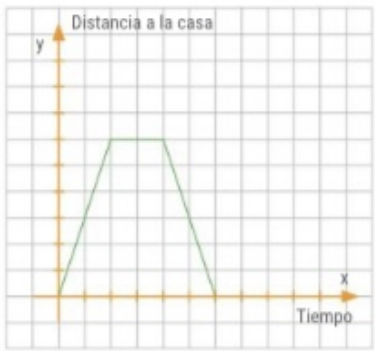
b



d



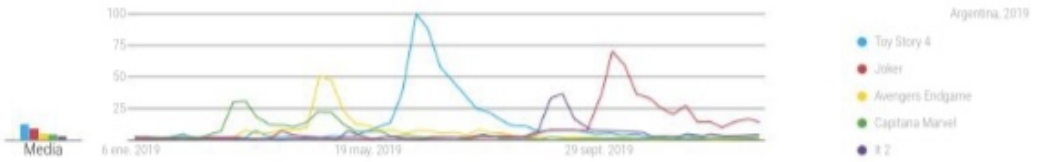
c



a

3. Observen atentamente y respondan.

En Google Trends se puede comparar cuántas búsquedas de una palabra se han hecho. El siguiente gráfico muestra las cinco películas preferidas en la Argentina en el año 2019 en ese buscador.



a. ¿Cuál fue la película preferida? La película más buscada fue Toy Story 4.

b. ¿Por qué piensan que los gráficos tienen esa forma? Porque en determinados momentos, cada una de las películas tuvo más o menos búsquedas.

c. Observando el gráfico, ¿se puede afirmar que Toy Story 4 fue la película más vista en 2019 en la Argentina?

No, solo se puede afirmar que fue la película mayor cantidad de búsquedas registró.

17. Gráficos y tablas

TracO

4. Reúnanse en grupos, lean atentamente y respondan.

Mónica fue a dar un paseo con su coche. Durante el trayecto, un gato se cruzó delante del automóvil. Mónica frenó de golpe y esquivó al gato. Mónica se asustó y decidió volver a casa. El siguiente gráfico es un registro simplificado de la velocidad del coche durante el paseo.

a. ¿Cuál fue la velocidad máxima del coche durante el paseo?

La máxima velocidad del coche fue de 60 km/h.

b. ¿Qué hora era cuando Mónica frenó de golpe para no atropellar al gato?

9:12 h

Comu

c. El camino de vuelta a la casa de Mónica ¿fue más corto que la distancia recorrida desde su casa al lugar donde ocurrió el incidente con el gato? Expliquen la respuesta utilizando la información que proporciona el gráfico. No se puede concluir, porque el gráfico describe la velocidad en función del tiempo, no distancia recorrida en función del tiempo.

5. **Resuelvan.**

Estos recipientes tienen la misma altura y la misma capacidad. Se los llena por medio de una canilla, de la que sale un flujo de agua constante.

A

B

C

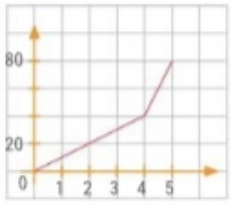
D

Los gráficos representan, para cada recipiente, la altura del agua en cada uno de ellos en función del tiempo transcurrido en minutos desde el comienzo de llenado.
Escriban en cada gráfico la letra del recipiente que corresponde.

a.

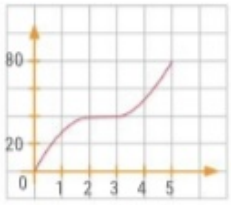
b

b.



d

c.



c

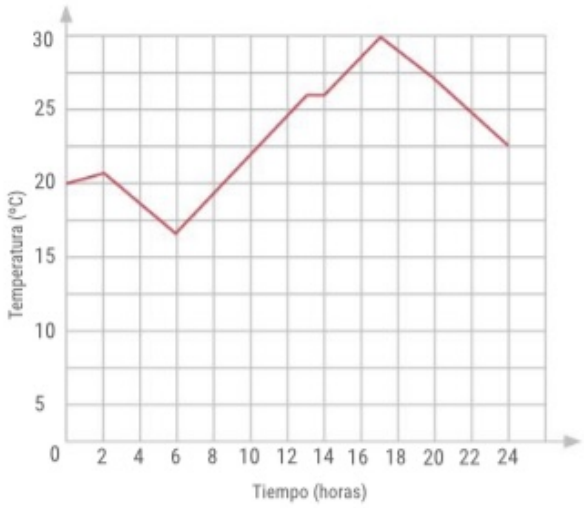
d.

a

18. Funciones

▶ SABERES DINÁMICOS

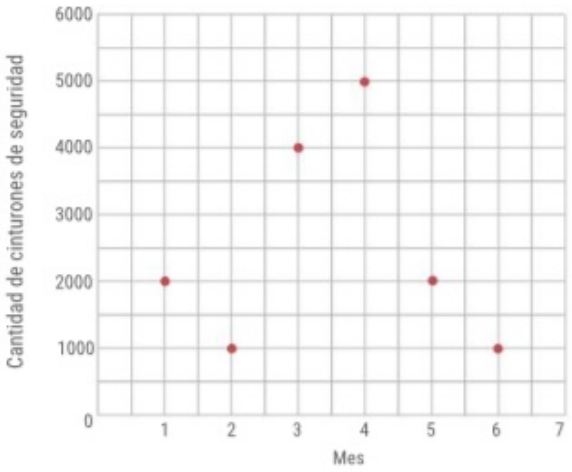
El gráfico muestra la temperatura en la ciudad de Mendoza durante un día.



En este gráfico, **para cada momento del día** (variable independiente) existe una **única temperatura** (variable dependiente). Se dice que la temperatura depende del momento del día.

El gráfico muestra la producción de una fábrica de cinturones de seguridad, desde enero a junio.

En este caso los puntos NO se unen, porque los meses son cantidades enteras, no se fraccionan.



En este ejemplo, **para cada mes del año** (variable independiente) existe **una única cantidad de cinturones de seguridad fabricados** (variable dependiente). Se dice que la cantidad de cinturones de seguridad fabricados depende del mes del año.

Ambos gráficos corresponden a relaciones que son funciones

Una relación es **función** cuando para todo **valor** representado sobre el eje **x** le corresponde un **único** valor representado sobre el eje **y**.

Dinámica TConecta

Para saber cómo reconocer si una relación es una función a partir de un gráfico ingresen en puerto.pub/fgra* y a partir de una tabla ingresen en puerto.pub/ftab**.

* Enlace acortado de https://youtu.be/EQhRyPTpv40 y ** Enlace acortado de https://youtu.be/GX7b5xlQey4

TEST DE COMPRENSIÓN

ApAp

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. La siguiente relación ¿es una función? ¿Por qué? Sí, porque a una cantidad de kilowatts por hora consumidos le corresponde un único costo de facturación.
   "El costo de la factura de la luz depende de la cantidad de kilowatts por hora consumidos".
   b. En un gráfico, si a dos valores distintos de la variable x les corresponde el mismo valor de la variable y, ¿corresponde a una función? Sí, lo que no puede pasar es que a un valor de la variable x le correspondan dos valores distintos de la variable y.
   c. ¿En cuál de los ejes se representa la variable independiente?
   La variable independiente se representa sobre el eje x, es decir, el horizontal.

ACTIVIDADES

18. Funciones

6. Lean atentamente y resuelvan.

En la ciudad de Buenos Aires un taxi cobra $60 al momento de iniciar el viaje y $6 por cada 200 metros recorridos.

a. Completen la tabla con los costos de algunos viajes, dependiendo del recorrido realizado.

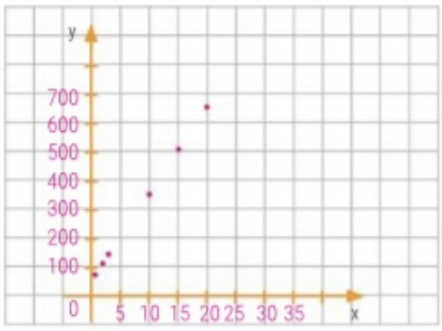
Recorrido (km)	1	2	3	7	10	15	20
Costo ($)	90	120	150	270	360	510	660

b. Representen los datos de la tabla en el sistema de ejes cartesianos.

Comu

c. Compartan el gráfico con sus compañeros. ¿Todos lo hicieron igual? ¿Qué diferencias y similitudes encuentran?

Pueden presentar diferencias en las escalas tomadas.



d. ¿Es correcto unir los puntos del gráfico? Expliquen cómo lo pensaron.

Sí, es correcto unir los puntos, porque la cantidad de kilómetros se puede fraccionar.

e. La relación entre el recorrido y el costo, ¿es una función? ¿Por qué?

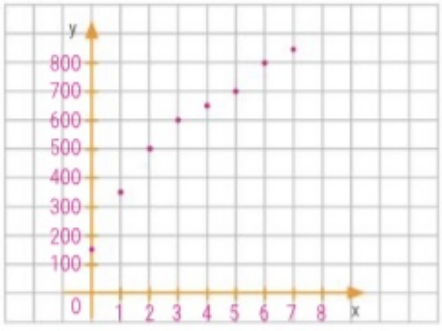
Sí, es una función. Porque a cada cantidad de kilómetros recorridos le corresponde solo un costo diferente.

7. Observen y resuelvan.

Joaquín plantó un árbol en el patio de su casa y una vez al año lo mide y anota su altura en una tabla como la siguiente.

Tiempo desde que se plantó (años)	0	1	2	3	4	5	6	7
Medida (cm)	150	350	500	600	650	700	800	850

a. Representen los valores de la tabla en el sistema de ejes cartesianos.



b. ¿Se pueden unir los puntos? ¿Por qué?

Sí, porque la variable independiente (los años) se pueden fraccionar.

c. La relación tiempo-altura, ¿es una función? Expliquen su respuesta.

Sí, porque a cada año, le corresponde una única altura del árbol.

8. Resuelvan.

Con una soga de 16 cm se forman rectángulos.

a. Completen la tabla y vuelquen los resultados en un sistema de ejes cartesianos en la carpeta.

Base (cm)	1	2	3,5	5
Altura (cm)	7	6	4,5	3

b. La relación entre la altura del rectángulo y su base, ¿es una función?

Sí, porque a cada valor de altura le corresponde un único valor de base y viceversa.

19. Función de proporcionalidad directa

▶ SABERES DINÁMICOS

Dos variables son **directamente proporcionales** cuando el cociente entre las cantidades que se corresponden es constante. El número que se obtiene al dividir las cantidades se denomina **constante de proporcionalidad** (*k*).

La cantidad de ruedas totales es directamente proporcional a la cantidad de bicicletas.

x: cantidad de bicicletas	y: cantidad de ruedas
1	2
2	4
5	10

2 : 1 = 2
4 : 2 = 2
10 : 5 = 2

k = 2, es la constante de proporcionalidad

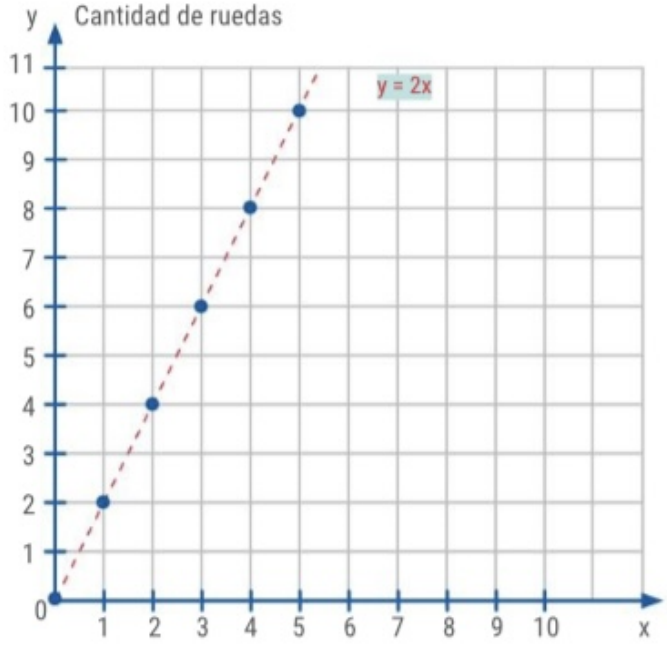
Lenguaje coloquial

El cociente entre dos cantidades correspondientes es igual a 2.

Lenguaje simbólico

y : x = 2, entonces: y = 2 . x (fórmula de la función)

La **representación gráfica** de cantidades directamente proporcionales da como resultado una **recta** que pasa por el origen de coordenadas.



En este caso el gráfico es de puntos aislados porque las cantidades son enteras. Los puntos quedan alineados en una recta que pasa por el origen de coordenadas.

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. ¿Es posible decir si una función es de proporcionalidad directa solo observando el gráfico? Explica tu respuesta.
   b. Si los valores de las dos variables aumentan, ¿se puede decir que son directamente proporcionales?
   c. ¿Cómo se puede averiguar la constante de proporcionalidad en cualquier relación de proporcionalidad directa?

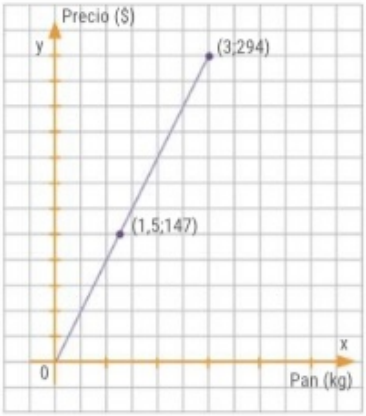
ApAp

a. Sí, siempre que el gráfico sea el de una recta que pase por el origen.
b. No, porque pueden aumentar pero no proporcionalmente.
c. La constante de proporcionalidad en cualquier relación de proporcionalidad directa se puede averiguar realizando y : x.

19. Función de proporcionalidad directa

9. Observen y respondan.

El gráfico muestra el precio que se paga por la cantidad de pan (en kg) que se compre.



a. ¿Cuánto cuesta el kilo de pan?

El kilo de pan cuesta $98.

b. Las variables, ¿se relacionan de forma directamente proporcional? Si la respuesta es afirmativa, escriban la constante de proporcionalidad. Si es negativa, expliquen por qué.

Sí, las variables se relacionan en forma directamente proporcional. La constante de proporcionalidad es k = 147 : 1,5 = 98.

10. Lean atentamente y resuelvan.

a. María tiene una receta para hacer alfajores de maicena. Sabe que para 30 alfajorcitos necesita 300 gramos de maicena. Completen la tabla.

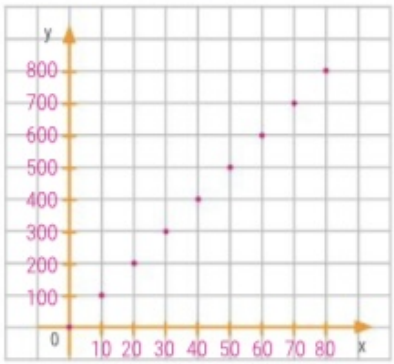
Cantidad de alfajores	30	15	10	20	50	55
Cantidad de maicena (gramos)	300	150	100	200	500	550

b. La relación "cantidad de alfajores"/"cantidad de maicena (en gramos)" ¿es una función de proporcionalidad directa? ¿Por qué?

Sí, porque el cociente entre la cantidad de maicena y la cantidad de alfajores es constante.

c. Escriban la fórmula y realicen el gráfico de la función.

La fórmula es y = 10. x, siendo "x" la cantidad de alfajores e "y" la cantidad de gramos de maicena.



11. Indiquen cuál o cuáles de las siguientes tablas pueden pertenecer a una función de proporcionalidad directa. Expliquen sus respuestas.

a.

x	y
6	30
12	60
4	20
1	5
5	25

Sí, porque el cociente y : x es constante, y : x = 5.

b.

x	y
1	2
2	4
3	6
4	12
5	24

No, porque el coiente y : x no es constante.

c.

x	y
5	1
10	2
15	3
20	4
25	5

Sí, porque el cociente y : x es constante, y : x = 1/5.

d.

x	y
2	1
4	2
6	6
8	8
10	10

No, porque el cociente y : x no es constante.

20. Función de proporcionalidad inversa

▶ SABERES DINÁMICOS

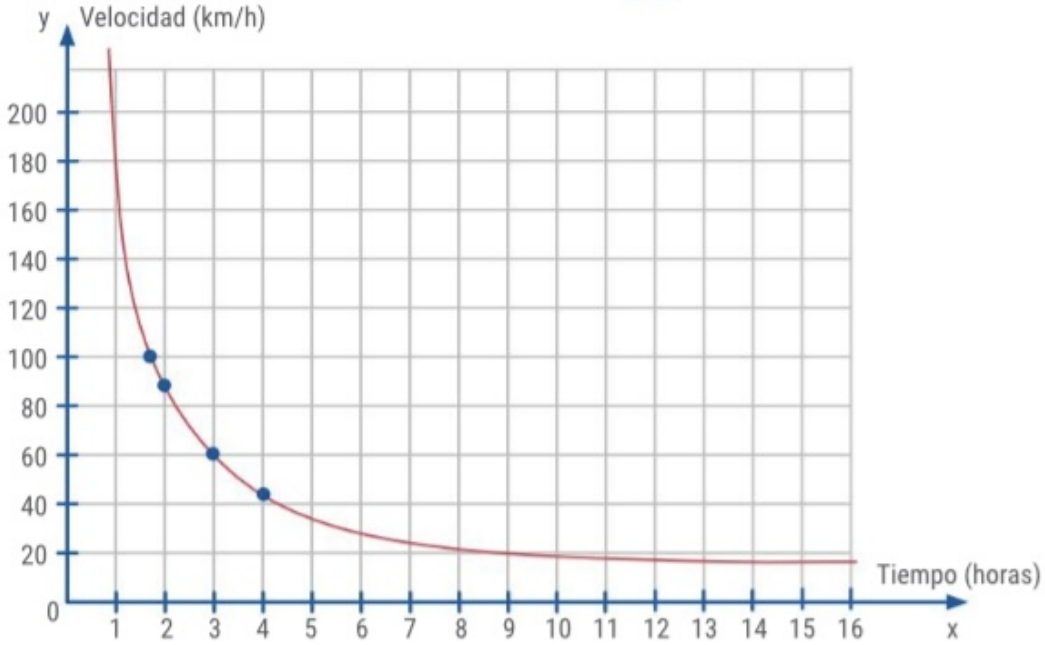
Dos variables se relacionan de forma **inversamente proporcional** cuando el producto entre los valores que se corresponden es constante. A ese producto se lo llama **constante de proporcionalidad** (*k*).

Un automóvil se desplaza a una velocidad constante. El tiempo que tarda en recorrer una determinada distancia es inversamente proporcional a la velocidad en que se desplaza.

Tiempo (horas)	Velocidad (km/h)	
1,8	100	1,8 . 100 = 180
2	90	2 . 90 = 180
3	60	3 . 60 = 180
4	45	4 . 45 = 180

El producto entre dos cantidades correspondientes es 180, entonces k = 180 es la constante de proporcionalidad inversa.

$$y \cdot x = 180, \text{ entonces: } y = \frac{180}{x}$$



Cuando los valores de una variable aumentan, los de la otra disminuyen **en la misma proporción**.
La representación gráfica es una curva llamada **hipérbola**.

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.

a. En una función de proporcionalidad inversa, si una variable aumenta el triple, ¿qué sucede con la otra? Disminuye el triple.

b. En una función de proporcionalidad inversa: $y = \frac{60}{x}$. Si y = 2, ¿cuánto vale x? El valor de x es 30.

ApAp c. ¿Cómo se puede averiguar la constante de proporcionalidad en cualquier relación de proporcionalidad inversa?
La constante de proporcionalidad en cualquier relación de proporcionalidad inversa se puede calcular realizando el producto x. y.

ACTIVIDADES

20. Función de proporcionalidad inversa

12. Escriban tres ejemplos de relaciones inversamente proporcionales.

A cargo del alumno.

13. Lean atentamente y resuelvan.

Para llenar una pileta se utiliza una manguera de la que sale un flujo constante de agua. Esta manguera tarda 8 horas en llenar la pileta. Como necesitan llenarla más rápido, le agregan mangueras cuyo caudal es igual a la primera.

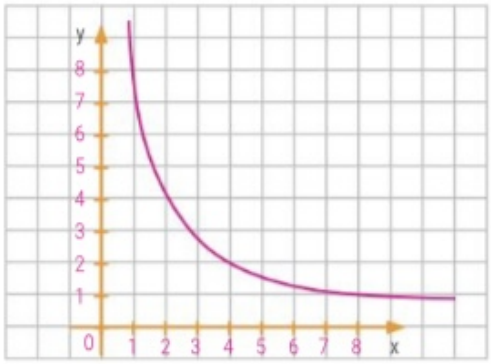
a. Completen la tabla.

Tiempo que tarda en llenarse (horas)	8	4	1,6
Cantidad de mangueras	1	2	5

b. La relación anterior, ¿es de proporcionalidad inversa?
Si la respuesta es afirmativa, indiquen la fórmula.
Si es negativa, expliquen por qué.

Sí, es de proporcionalidad inversa. La fórmula es $y = 8/x$.

c. Realicen un gráfico de la situación.



14. Indiquen cuál o cuáles de las siguientes tablas pueden pertenecer a una función de proporcionalidad inversa. Hallen las constantes de proporcionalidad en cada caso.

a.

x	y
1	5
2	4
3	3
4	2
5	1

No, porque el producto x. y no es constante.

b.

x	y
2	30
4	15
6	10
8	7,5
10	6

Sí, porque el producto x. y = 60 es constante.

c.

x	y
60	2
30	4
20	6
10	12
5	24

Sí, porque el producto x. y = 120 es constante.

d.

x	y
10	3
3	10
15	2
5	4
6	5

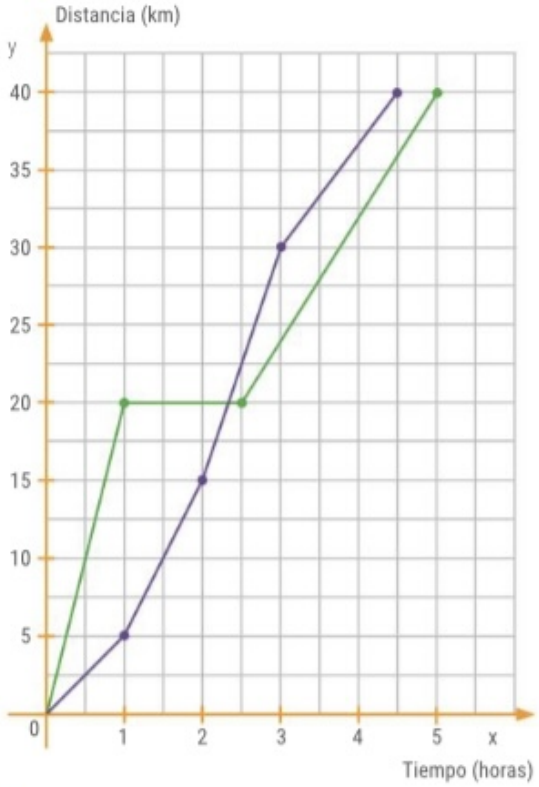
No, porque el producto x. y no es constante.

Integración final

3

15. Lean atentamente, observen y respondan.

Diego y Bianca participaron de una carrera de 40 km. Durante el trayecto, Diego comenzó rápido, se detuvo a descansar 90 minutos y luego siguió su marcha hasta el final. Bianca comenzó lentamente, luego aceleró su marcha y hacia el final disminuyó su velocidad. El gráfico muestra la distancia recorrida por los corredores a medida que pasa el tiempo.



a. ¿Cuál es la curva que corresponde a cada corredor? Expliquen cómo lo pensaron.
Verde: Diego (se detuvo 1 hora y media). Violeta: Bianca.

b. ¿Cuál de los dos completó primero los 40 km? ¿Cómo se dieron cuenta?
Bianca, porque empleó menos tiempo.

c. ¿Cómo pueden explicar la intersección de ambas curvas en el gráfico?
En el punto de intersección Bianca y Diego se encontraron.

d. La relación tiempo/distancia recorrida de cada corredor, ¿es una función? ¿Por qué?
Sí, porque en ambas a cada tiempo le corresponde una distancia única.

16. Escriban tres ejemplos de relaciones funcionales de la realidad. A cargo del alumno.

17. Construyan un gráfico que muestre el tiempo que les lleva llegar a la escuela desde su casa, en relación a la distancia. A cargo del alumno.

El tiempo puede estar en minutos y la distancia la pueden medir en cantidad de cuadras.

18. Lean atentamente y respondan.

Martín hizo un experimento en su casa y lo escribió para la clase de Química:

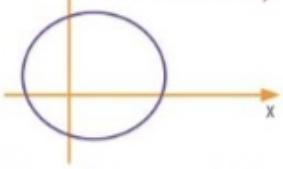
"Saqué del fuego una cacerola con agua hirviendo y enseguida le puse el termómetro. Al principio la temperatura del agua bajó rápido: en 5 minutos pasó de 100 °C a 70 °C. Luego, se fue enfriando más lentamente y a los 20 minutos estaba en 40 °C. Media hora más tarde, la temperatura del agua era de 15 °C".

a. Construyan un gráfico que represente la temperatura del agua (en °C) en función del tiempo transcurrido (en minutos). A cargo del alumno.

b. Comparen el gráfico que hicieron con el de un compañero. ¿Son iguales? ¿Son los dos correctos? ¿Por qué? A cargo del alumno.

19. Decidan cuál o cuáles de los siguientes gráficos pueden pertenecer a una función. Expliquen sus respuestas.

a. No corresponde a una función, porque aun mismo valor de x, le corresponden dos valores diferentes de y.

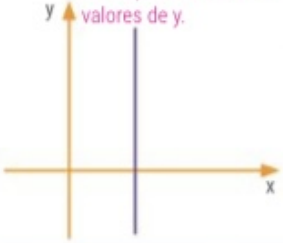


d. Sí, porque a cada valor de x le corresponde un único valor de y.

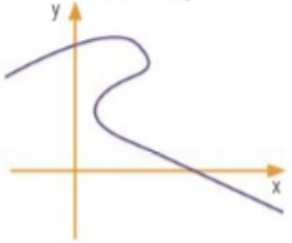
b. Sí, porque a cada valor de x le corresponde un único valor de y.

e. Sí, porque a cada valor de x le corresponde un único valor de y.

c. No, porque a un único valor de x le corresponden muchos valores de y.



f. No, porque a un valor de x le corresponde más de un valor de y.

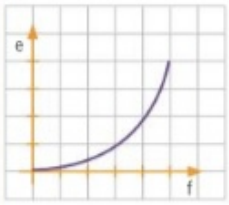


Comu

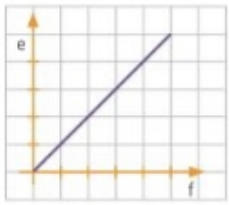
20. Lean atentamente y escriban la letra del gráfico que corresponde a cada persona. Expliquen cómo lo pensaron.

Los gráficos corresponden al ritmo que han seguido cuatro personas en un determinado tramo de una carrera. En el "eje x" se representa el tiempo, y en el "eje y", el espacio recorrido.

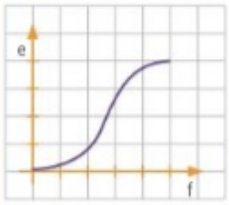
a.



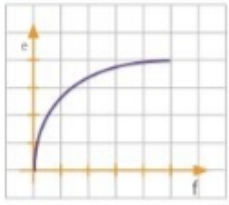
c.



b.



d.



- Julián: comenzó con mucha velocidad y luego fue cada vez más despacio. — d
- María: empezó lentamente y fue aumentado gradualmente su velocidad. — a
- Lucas: empezó lentamente, luego aumentó mucho su velocidad y después fue frenando poco a poco. — b
- Josefina: mantuvo un ritmo constante. — c

21. Lean atentamente y respondan.

La factura de gas domiciliario está compuesta por un cargo fijo y uno variable. Para clientes residenciales el costo del gas natural es de $234 el cargo fijo, más $10,50 por metro cúbico consumido.

a. ¿Cuánto debe pagar una familia que consumió 230 m^3 en un mes? ¿Y una que consumió 190 m^3?

b. Realicen un gráfico de la situación.

c. La relación "costo"/"metros cúbicos consumidos" ¿es una función de proporcionalidad directa? Expliquen su respuesta.

a. Una familia que consumió 230 m^3 debe pagar $2 649, y una que consumió 190 m^3 debe pagar $2 229.
b. A cargo del alumno.
c. No, porque el gráfico no pasa por el origen de coordenadas.

22. Resuelvan.

Para preparar 3 kilos de pan casero son necesarios 2,5 kilos de harina.

a. ¿Cuánto kilos de harina se deben comprar para hacer 15 kilos de pan? Para hacer 15 kg de pan casero se deben comprar 12,5 kg de harina.

b. Las variables ¿se relacionan de forma directa o inversamente proporcional?
Las variables se relacionan en forma directamente proporcional.

c. Realicen un gráfico de la situación.
A cargo del alumno.

23. Lean atentamente y resuelvan.

Un rectángulo tiene 10 metros de base y 7 metros de altura.

a. Completen la tabla con las medidas de base y altura de otros rectángulos que tengan igual área que el primero.

Base (metros)	Altura (metros)
8	8,75
5	14
4	17,5

b. Grafiquen en un sistema de ejes cartesianos.
A cargo del alumno.

c. La relación base/altura ¿es una función de proporcionalidad inversa?
Sí, porque el producto b . h = 70, es constante.

24. Resuelvan.

Para envasar una determinada cantidad de aceite son necesarios 8 envases de 20 litros cada uno.

a. ¿Cuántos envases de 5 litros cada uno son necesarios para envasar la misma cantidad de aceite?
Son necesarios 32 envases.

b. Las variables ¿se relacionan de forma directa o inversamente proporcional?
Se relacionan en forma inversamente proporcional.

c. Completen una tabla y realicen un gráfico de la situación.
A cargo del alumno.

4 Cuerpos

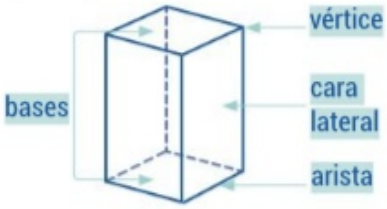
21. Clasificación de los cuerpos

▶ SABERES DINÁMICOS

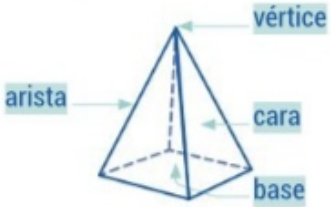
Un **cuerpo geométrico** o sólido es un elemento geométrico que tiene tres dimensiones: largo, ancho y alto (o profundidad), que ocupa un lugar en el espacio y, por lo tanto, tiene volumen.
Los cuerpos se clasifican según las características de sus caras en **poliedros** (si tienen todas sus caras planas) y **cuerpos redondos** (si tienen al menos una cara curva).

CUERPOS POLIEDROS

PRISMA: sus caras laterales son paralelogramos y sus bases, polígonos paralelos.



PIRÁMIDE: todas sus caras concurren en un vértice, excepto una que es la base.



CUERPOS REDONDOS

Áreas dinámicas [Matemática y Ciencias Naturales]

En la naturaleza se pueden encontrar muchos de los cuerpos poliedros. Hay seres vivos con forma de poliedro como los radiolarios, un tipo de protozoos. El virus del HIV está compuesto por unidades básicas de proteínas que se unen en forma de icosaedro, estructura que hace muy eficaz la transmisión de este virus. Los herpes, virus causantes de diversas infecciones cutáneas en los seres humanos, tienen una estructura icosaédrica. Los silicatos, que forman parte de la mayoría de las rocas, arenas y arcillas, están compuestos por silicio y oxígeno que se coordinan en una estructura tetraédrica.

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. ¿Es cierto que el cuadrado es un poliedro? No, el cuadrado no es un cuerpo, es una figura plana.
   b. Los cuerpos redondos, ¿tienen todas sus caras curvas? No, basta con que una de ellas sea curva para que se considere redondo, como por ejemplo el cilindro.
   c. Clasifiquen en una tabla los cuerpos según su base: si es poligonal, si es circular o si no tiene.

ApAp

Cuerpos de base poligonal	Cuerpos de base circular	Cuerpos sin base
Prisma	Cilindro	Esfera
Pirámide	Cono	

ACTIVIDADES

21. Clasificación de los cuerpos

1. Clasifiquen en poliedros o redondos cada uno de los cuerpos que aparecen en la siguiente imagen. Para los cuerpos poliedros, indiquen la cantidad y la forma de sus caras.

a.

Pirámide. 4 caras triangulares y base rectangular.

c.

Cuerpo redondo.

e.

Cuerpo redondo.

g.

Prisma. 4 caras laterales rectangulares y 2 bases rectangulares.

b.

Cuerpo redondo.

d.

Prisma. 4 caras laterales cuadradas y 2 bases cuadradas.

f.

Cuerpo redondo.

h.

Prisma. 4 caras laterales cuadradas y 2 bases cuadradas.

2. Mencionen dos objetos con forma de cuerpos poliedros y cuatro con forma de cuerpos redondos. Por ejemplo, un paquete de harina tiene forma de poliedro, mientras que una lata de duraznos, de un cuerpo redondo.

Cuerpos poliedros: caja de fósforos, libro.

Cuerpos redondos: rollo de papel higiénico, torta, taza, cañería.

3. Escriban V (verdadero) o F (falso). Expliquen las respuestas.

a. Un cubo tiene en total cuatro caras. F

Un cubo tiene 6 caras.

b. Un prisma cuadrangular tiene seis vértices. F

Un prisma cuadrangular tiene 8 vértices.

c. Las caras de una pirámide son cuadradas. F

Las caras de una pirámide son triángulos.

d. Un cubo tiene doce aristas. V

Un cubo tiene 12 aristas.

e. Los prismas tienen dos bases. V

Una base inferior y otra superior.

f. En los prismas todas las caras laterales son triángulos. F

En los prismas todas las caras son paralelogramos.

g. Las pirámides tienen caras cuadradas. F

Las pirámides tienen caras triangulares.

h. Los conos tienen base cuadrangular. F

Los conos tienen base circular.

22. Poliedros regulares

▶ SABERES DINÁMICOS

Los **poliedros regulares** son aquellos en los que todas sus caras son polígonos regulares iguales.

POLIEDROS REGULARES	NOMBRE	CANTIDAD DE CARAS	FORMA DE LAS CARAS
	Tetraedro	4	Triángulos equiláteros iguales.
	Cubo o hexaedro	6	Cuadrados iguales.
	Octaedro	8	Triángulos equiláteros iguales.
	Dodecaedro	12	Pentágonos regulares iguales.
	Icosaedro	20	Triángulos equiláteros iguales.

La siguiente es una relación muy importante.

Relación de Euler: en todo poliedro se verifica que

$$C + V = A + 2$$

C: cantidad de caras

V: cantidad de vértices

A: cantidad de aristas

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/euler* para conocer más sobre la relación de Euler.

* Enlace acortado de https://youtu.be/BYPw_pd-xFo

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. ¿Todo prisma de 6 caras es regular? No, únicamente el cubo es un prisma regular de 6 caras.
   b. Una pirámide de base triangular, ¿es un tetraedro? Sí, es un tetraedro siempre que las caras triangulares sean iguales al triángulo de la base.
   c. ¿Es cierto que un dodecaedro tiene 12 caras, 20 vértices y 20 aristas? No, un dodecaedro tiene 12 caras pentagonales, 20 vértices y 30 aristas.
   d. Analicen si la relación de Euler se cumple solo en los poliedros regulares o en todos los poliedros. La relación de Euler se cumple en todos los poliedros.

ApAp

ACTIVIDADES

22. Poliedros regulares

4. Unan con flechas cada cuerpo con sus características.

a. Cubo
b. Icosaedro
c. Tetraedro
d. Dodecaedro
e. Octaedro

- 4 caras triangulares, 4 vértices y 6 aristas.
- 20 caras triangulares, 12 vértices y 30 aristas.
- 8 caras triangulares, 6 vértices y 12 aristas.
- 12 caras pentagonales, 20 vértices y 30 aristas.
- 6 caras cuadradas, 8 vértices y 12 aristas.

Trabajo

5. Reúnanse en grupos y verifiquen la relación de Euler en cada uno de los siguientes cuerpos. Antes de empezar, organicen cómo realizarán la actividad: si todos juntos analizan cada cuerpo, o bien, si cada uno analiza un cuerpo distinto y luego comparten los resultados obtenidos.

a. Cubo

Euler $C + V = A + 2$ $6 + 8 = 12 + 2$

b. Dodecaedro

Euler $C + V = A + 2$ $12 + 20 = 30 + 2$

c. Icosaedro

Euler $C + V = A + 2$ $20 + 12 = 30 + 2$

d. Tetraedro

Euler $C + V = A + 2$ $4 + 4 = 6 + 2$

e. Octaedro

Euler $C + V = A + 2$ $8 + 6 = 12 + 2$

DinámicaMente

Observen los siguientes diseños y analicen qué poliedros aparecen dibujados en cada uno.

a.

a. Tetraedro dentro de un tetraedro.

b.

b. Octaedro dentro de un cubo.

c.

c. Cubo dentro de un octaedro.

d.

d. Icosaedro dentro de un dodecaedro.

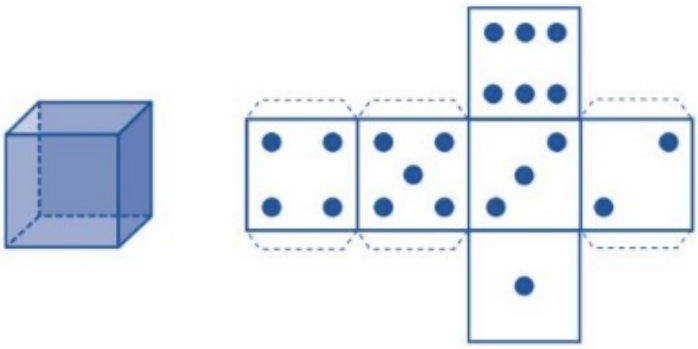
e.

e. Dodecaedro dentro de un icosaedro.

23. Desarrollo plano de los cuerpos

▶ SABERES DINÁMICOS

La siguiente estructura se corresponde con un dado de juegos desplegado. A este tipo de dibujo se lo denomina **desarrollo plano de un cuerpo.**

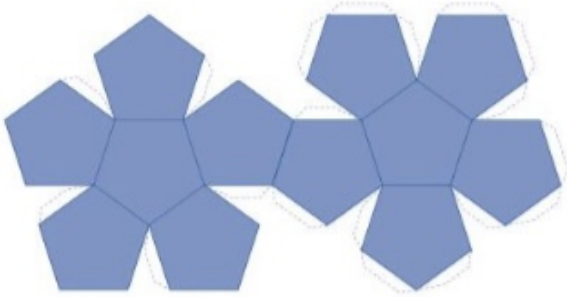


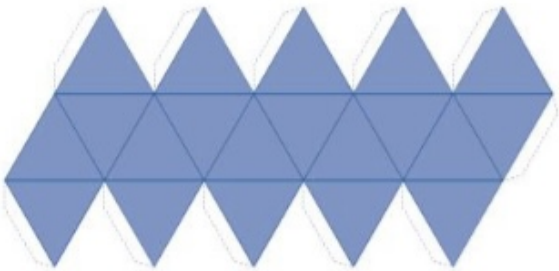
El desarrollo plano de un cuerpo permite conocer las figuras que lo forman, calcular su superficie total y construirlo.

Por ejemplo, si la longitud de la arista (a) del dado es de 2 cm, entonces el área total del dado será:

$$6 \cdot a^2 = 6 \cdot (2\ cm)^2 = 24\ cm^2$$

Doblando las solapas y uniendo las caras se pueden construir un dodecaedro y un icosaedro.





TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen sus respuestas.
   a. El desarrollo plano de un prisma, ¿puede incluir pentágonos? Sí, en el caso en que las bases del prisma sean pentagonales.
   b. El desarrollo plano de un cilindro, ¿incluye un rectángulo? Sí, es la cara lateral.
   c. ¿Cuántos triángulos equiláteros tiene el desarrollo plano de un octaedro? El desarrollo plano de un octaedro presenta 8 triángulos equiláteros.
   d. El desarrollo de un cubo, ¿puede tener 6 cuadrados ubicados en una fila, uno al lado del otro? No, porque no se formaría el cubo.

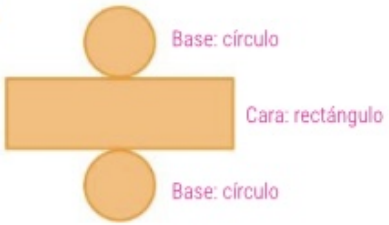
ApAp

ACTIVIDADES

23. Desarrollo plano de los cuerpos

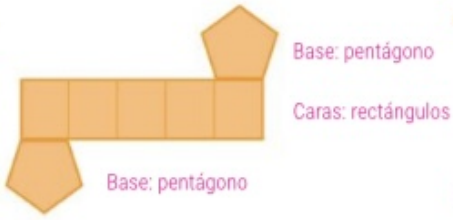
6. Escriban el nombre del cuerpo que corresponde a cada desarrollo plano. Luego, indiquen qué forma tienen sus caras laterales y sus bases.

a.



Cilindro. Cara: rectángulo. Bases: círculos.

b.



Prisma de base pentagonal. Caras: rectángulos. Bases: pentágonos.

c.

Prisma de base pentagonal. Caras: rectángulos. Bases: pentágonos.

Comu

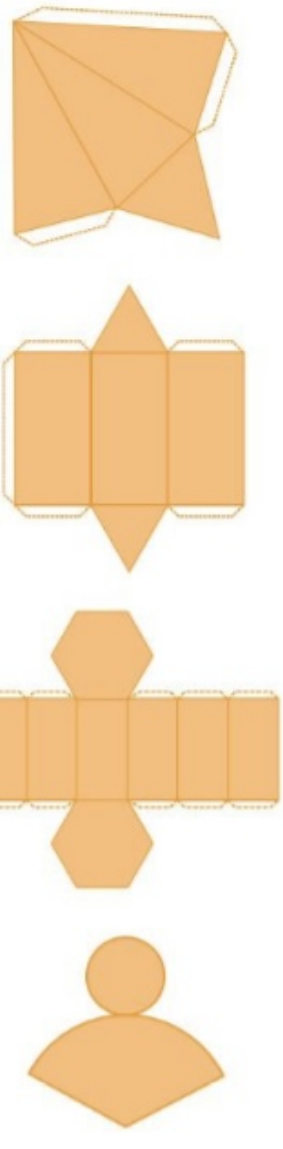
7. Unan cada cuerpo con su correspondiente desarrollo plano. Luego, elijan uno de ellos y constrúyanlo sobre cartulina. Describan paso por paso cómo hicieron para realizar la construcción.

a. Prisma hexagonal

b. Cono

c. Prisma triangular

d. Pirámide triangular



23. Desarrollo plano de los cuerpos

8. Observen el siguiente cubo que está formado por cubos pequeños iguales.

a. ¿Cuántos cubos pequeños iguales forman el cubo grande?

El cubo grande está formado por 64 cubos pequeños.

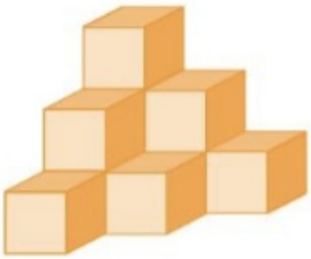
b. ¿Cuántas caras cuadradas hay en total entre las dos bases?

Entre las dos bases cuadradas hay en total 32 cuadraditos, 16 por cada base.

c. Si cada cubito tiene un volumen de 2 cm^3, ¿cuál es el volumen total del cubo grande?

Como el cubo está formado por 64 cubitos, el volumen total del cubo grande es 128 cm^3 (V = 64 . 2 cm^3 = 128 cm^3).

d. Para armar la siguiente forma, ¿cuántos cubitos deberíamos sacarle al cubo grande?



El cuerpo de la figura está formado por 10 cubitos, entonces habría que sacarle 54 cubitos al cubo grande para poder formarla.

TracO

9. Organícense en grupos, analicen la siguiente situación y resuelvan.

Se dispone de un galpón con forma de prisma rectangular de 4 metros de ancho, 7 metros de largo y 3 metros de alto. Marquen con una X la cantidad de fardos que se pueden guardar como máximo.

a. 112 ☐

b. 42 ☐

c. 168 ☐

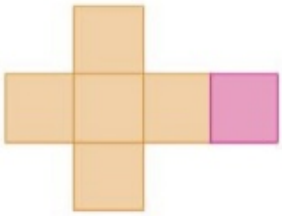
d. 84 X

El volumen del galpón es V = 4 m . 7m . 3 m = 84m^3; el volumen de cada fardo es de 1 m^3, entonces como máximo se pueden guardar 84 fardos en el galpón.

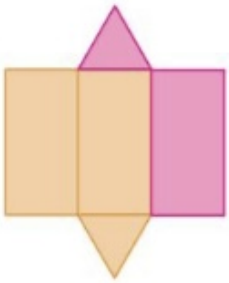
23. Desarrollo plano de los cuerpos

10. Agreguen las figuras que faltan para poder armar los poliedros.

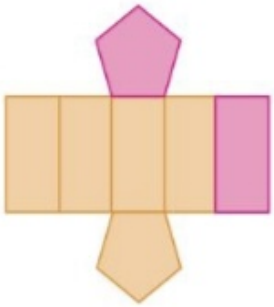
a. Cubo.



b. Prisma de base triangular.



c. Prisma de base pentagonal.

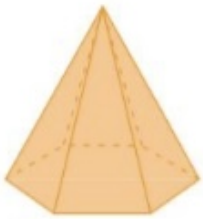


11. Marquen con una X la respuesta correcta.

a. ¿Qué ven si observan desde arriba el siguiente cuerpo geométrico?

- Un cuadrado. ☐
- Un triángulo. ☐
- Un círculo. ☐
- Un rectángulo. X

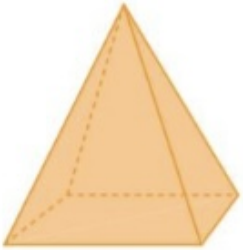
b. ¿Qué figura corresponde a la vista de un lado del siguiente cuerpo?



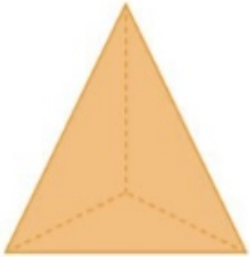
- Un triángulo. X
- Un pentágono. ☐
- Un hexágono. ☐
- Un rectángulo. ☐

c. ¿En cuál de los siguientes cuerpos geométricos, si se mira desde arriba o de frente, se observa la misma figura?

☐



☐



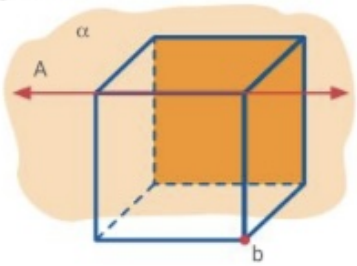
X

24. Punto, recta y plano

▶ SABERES DINÁMICOS

Plano, **recta** y **punto** son los tres elementos fundamentales de la geometría.

Cada cara del cubo representa una porción del plano, las aristas son segmentos de rectas y los vértices son los puntos donde concurren tres o más aristas.

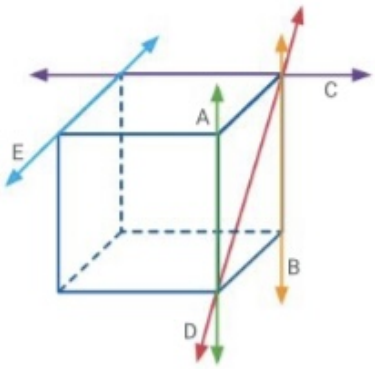


Acordamos la siguiente convención para nombrar los elementos fundamentales de la geometría:

- **Planos**: con letras del alfabeto griego. Por ejemplo: α, β, γ.
- **Rectas**: con letras imprentas mayúsculas. Por ejemplo: A, B, C.
- **Puntos**: letras imprentas minúsculas. Por ejemplo: a, b, c.

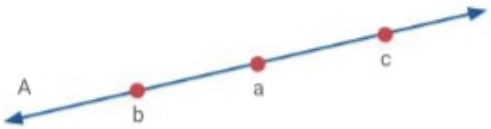
Dos rectas son **coplanares** cuando están incluidas en el mismo plano, y dos rectas son **alabeadas** cuando no están incluidas en el mismo plano y no tienen puntos en común. Las **rectas coplanares** se clasifican según su posición en **secantes** y **paralelas**.

- Rectas coplanares
  - Secantes: tienen un punto en común.
    - Perpendiculares: se intersecan formando cuatro ángulos rectos.
    - Oblicuas
  - Paralelas: no tienen puntos en común.



A, B y D son coplanares. A y B son paralelas. C y E son perpendiculares. A y D son oblicuas. D y E son alabeadas.

Para nombrar los **segmentos** y las **semirrectas** se deben tener en cuenta dos puntos.



$\overline{ba}$: segmento ba.
$\overrightarrow{bc}$: semirrecta de origen b que contiene al punto c.

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen sus respuestas.
   a. ¿Cuántos puntos determinan una recta? ¿Y una semirrecta? Una recta es determinada por dos puntos, y una semirrecta también.
   b. ¿Cuántos puntos no alineados determinan un único plano? Tres puntos no alineados determinan un único plano.
   c. Dos rectas que no se cortan en ningún punto, ¿siempre son paralelas? No, las rectas pueden ser alabeadas.

ApAp

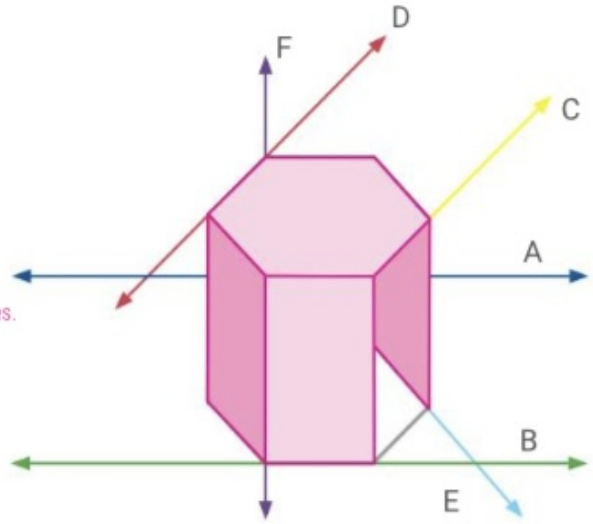
ACTIVIDADES

24. Punto, recta y plano

12. Observen la figura y escriban V (verdadero) o F (falso), según corresponda. Expliquen la elección.

Planos paralelos.

Planos perpendiculares.



a. Las rectas A y B son perpendiculares. — F — Las rectas A y B son paralelas.

b. Las rectas C y D son paralelas. — V — Son coplanares por pertenecer al plano de la base superior del prisma y son paralelas.

c. Las rectas C y E son perpendiculares. — F — Por no ser rectas coplanares.

d. La recta F es perpendicular a la recta B. — V — Por ser coplanares y cortarse formando ángulos rectos.

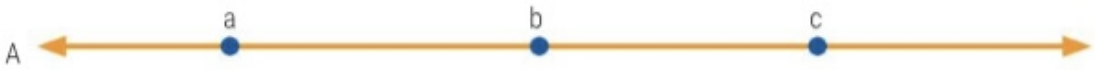
e. Las rectas B y E son oblicuas. — V — Son coplanares por pertenecer al plano de la base inferior del prisma y cortarse sin formar ángulos rectos.

f. La recta F pertenece a más de un plano. — V — Es la intersección entre dos planos que contienen a dos caras diferentes del prisma (además de pertenecer a infinitos planos).

13. En el prisma de la actividad anterior, pinten con un mismo color dos planos paralelos. ¿Es posible pintar dos planos perpendiculares?

Planos paralelos: pueden ser, cualesquiera dos caras enfrentadas son paralelas entre sí, y los planos que contienen a cada una de las bases, son paralelos entre sí.
Planos perpendiculares: pueden ser cada una de las caras con cada una de las bases del prisma.

14. Completen los espacios vacíos.



a. $\overrightarrow{ab}$ es la semirrecta de origen a que contiene al punto b.

b. $\overrightarrow{ac}$ es la misma semirrecta que $\overrightarrow{ab}$.

c. Las semirrectas $\overrightarrow{ba}$ y $\overrightarrow{bc}$ tienen origen en el punto b.

Integración final

15. Observen la siguiente imagen y completen.

a. La caja se corresponde con el cuerpo geométrico [prisma] de base [rectangular].

b. El prisma es un cuerpo [poliedro] y no redondo.

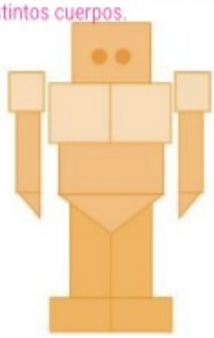
c. La caja contiene pelotas que son cuerpos [redondos] llamados [esferas].

d. Las caras de la caja son de forma [rectangular].

e. Las pelotas contienen dos tipos de figuras planas que son [pentágonos] y [hexágonos].

16. Marquen con una X los cuerpos geométricos que necesitarían para darle forma tridimensional a este robot. Luego, indiquen qué cantidad de cada uno de esos cuerpos necesitan.

Se brinda una solución posible, pero puede haber otras ya que se pueden considerar distintos cuerpos.



- Pirámides de base cuadrangular. [X] (1)
- Cubos. [X] (2)
- Cilindros. [ ]
- Esferas. [ ]
- Prismas de base rectangular. [X] (10)
- Octaedros. [ ]
- Prismas de base triangular. [X] (2)

17. Escriban V (verdadero) o F (falso). Expliquen sus respuestas.

a. Un prisma de base hexagonal tiene en total cuatro caras. [F]
Tiene en total 6 caras por ser sus bases hexágonos.

b. Un prisma cuadrangular tiene ocho vértices. [V]
Tiene 4 vértices en cada base.

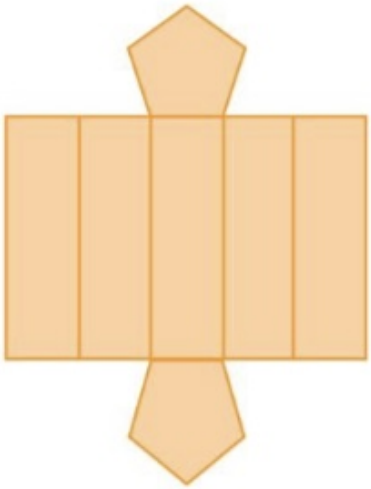
c. Las caras de un tetraedro son cuadradas. [F]
Las caras de un tetraedro son triángulos.

d. Un prisma tiene doce aristas. No siempre. [F]
Por ejemplo, en un prisma rectangular se cumple, pero en uno de base pentagonal el número de aristas es 15.

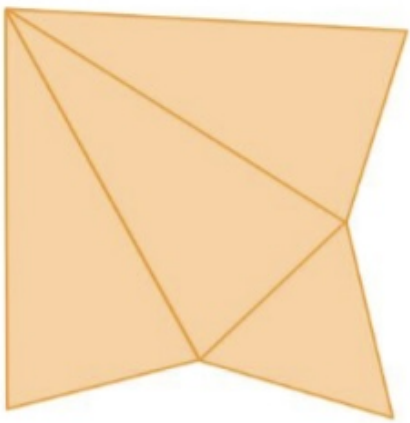
e. Los conos tienen dos bases. [F]
Los conos tiene una sola base.

18. Escriban el nombre del cuerpo que representa cada desarrollo plano. Verifiquen la relación de Euler.

a. Prisma de base pentagonal.
Euler C + V = A + 2 7 + 10 = 15 + 2



b. Pirámide de base triangular.
Euler C + V = A + 2 4 + 4 = 6 + 2



19. La siguiente imagen es un cuerpo geométrico visto de frente. Marquen con una X a cuál o cuáles cuerpos puede corresponder.

- Pirámide. [X]
- Cono. [X]
- Prisma de base pentagonal. [ ]
- Cubo. [ ]
- Prisma de base triangular. [ ]

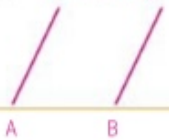
20. Observen el cuerpo geométrico y marquen con una X cuál de las figuras corresponde a la vista de arriba.

a. [ ]

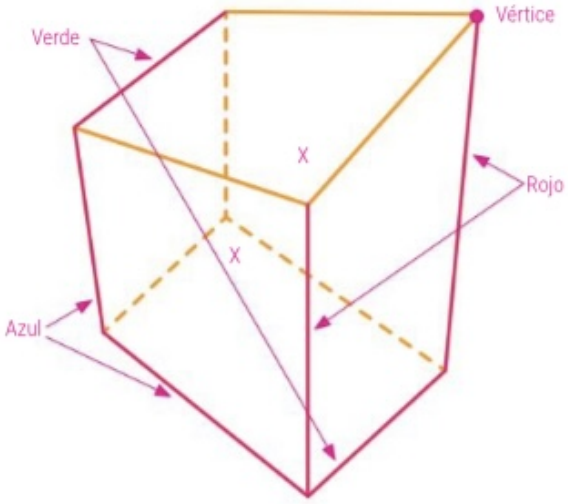
b. [X]

c. [ ]

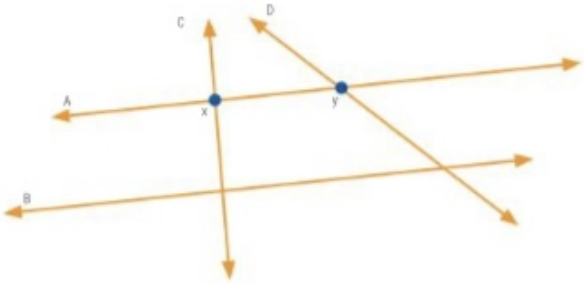
21. Dibujen dos rectas que cumplan con la siguiente condición: "que dividan al plano en tres regiones". Luego, respondan: ¿qué posición tienen las rectas entre sí? Las rectas A y B son paralelas entre sí.



22. Tracen en el siguiente cuerpo con color rojo dos rectas paralelas; con azul, dos rectas perpendiculares y con verde, dos rectas alabeadas. Luego, marquen con una X dos planos paralelos y marquen un punto que sea vértice.



23. Observen el siguiente esquema y luego completen con // (paralelas), ⊥ (perpendiculares) u ∠ (oblicuas), según corresponda.



a. A [//] B

b. B [∠] D

c. C [∠] D

d. A [⊥] C

e. C [⊥] B

24. Tengan en cuenta la actividad anterior e indiquen qué rectas se intersectan en el punto "x" y qué rectas se intersectan en el punto "y".

En el punto "x" se intersectan las rectas A y C.
En el punto "y" se intersectan las rectas A y D.

5 Ángulos

25. Ángulos. Sistema sexagesimal y operaciones

▶ SABERES DINÁMICOS

Un **ángulo** es la región del plano determinada por dos semirrectas de origen común.

El plano queda dividido en dos ángulos.

Un ángulo es **cóncavo** $(\hat{\beta})$ cuando su medida es mayor a 180° y menor a 360°; si no, es **convexo** $(\hat{\alpha})$.

Los ángulos se pueden medir en el sistema sexagesimal. El **sistema sexagesimal** es un sistema de numeración posicional que emplea como base el número 60.

1° (un grado) = 60′ (sesenta minutos) 1′ (un minuto) = 60″ (sesenta segundos)

Operaciones con los ángulos

Adición de dos ángulos	Sustracción de dos ángulos
$63°\ 25'\ 32'' + 22°\ 18'\ 45'' = 85°\ 43'\ 77''$ $(60'' + 17'')$ $1' = 85°\ 44'\ 17''$	$63°\ 25'\ 32'' - 22°\ 18'\ 45'' = 24'\ 92''$ $(60'' + 32'')$ $41°\ 6'\ 47''$
Multiplicación de un ángulo por un número natural	**División de un ángulo por un número natural**
$15°\ 32'\ 21'' \cdot 3 = 45°\ 96'\ 63''$ $1' = 60''$ $+ 45°\ 97'\ 3''$ $1° = 60'$ $46°\ 37'\ 3''$	$34°\ 12'\ 36'' : 3 = 11°\ 24'\ 12''$ $33° = 1° + 60'$ $72'$ $72'$ $0'$ $36''$ $0''$

TEST DE COMPRENSIÓN

ApAp

1. Respondan y expliquen sus respuestas.
   a. ¿Cuánto mide la mitad de un ángulo de 45°? La mitad de un ángulo de 45° mide 22° 30′.
   b. La suma entre 25° 14′ 32″ y 64° 45′ 28″ ¿es un ángulo de 90°? Sí, porque su suma es 90°.
   c. ¿Cuántos segundos tiene un ángulo de 15° 25′ 56″? Expliquen cómo lo calcularon.
   Un ángulo de 15° 25′ 56″ tiene 55 556″, ya que: 15 . 60. 60″ + 25 . 60″ + 56″ = 55 556″

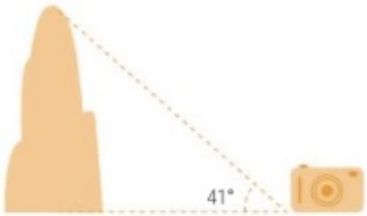
ACTIVIDADES

25. Ángulos. Sistema sexagesimal y operaciones

1. Analicen la siguiente situación problemática y respondan.

Un ingeniero se ubica a cierta distancia de un cerro, mide el ángulo que hay hasta la cima con un teodolito y obtiene 41°. Si se acerca unos metros, la medida del nuevo ángulo, ¿será mayor o menor que la anterior?

La medida del ángulo será mayor que 41° y menor que 90°.



2. Marquen con un círculo del mismo color las medidas que son equivalentes.

A 4° 30′	C 10 800″	B 155′	E 32°	D 90°
B 9 300″	D 89° 59′ 60″	A 270′	E 115 200″	C 3°

3. Completen los espacios vacíos con la medida que corresponde.

a. 85° + 95° = 180°

b. 72° + 18° = 90°

c. 32° + 148° = 180°

d. 45° 15′ + 134° 45′ = 180°

e. 36° 15′ 46″ + 53° 44′ 14″ = 90°

f. 89° 21′ 15″ + 0° 38′ 45″ = 90°

4. Resuelvan las siguientes operaciones entre ángulos en sus carpetas. Escriban los resultados obtenidos.

a. 90° + 3 . 41° 32′ 13″ = = 90° + 124° 36′ 39″ = 214° 36′ 39″

b. 242° 26′ 48″ : 2 − 88° 30″ = 121° 13′ 24″ − 88° 30″ = 33° 12′ 54″

c. (37° 41′ 42″ + 63° 15′ 6″) : 4 = 100° 56′ 48″ : 4 = 25° 14′ 12″

5. Unan con flechas cada expresión con su cálculo y su resultado.

a. La suma entre el doble de 75° y 23° 32′ 13″.	45° 7′ 19″ . 3 − 23°	173° 32′ 13″
b. La diferencia entre el triple 45° 7′ 19″ y 23°.	30° + 34° 28′ : 2	66° 21′ 57″
c. El triple de la diferencia entre 45° 7′ 19″ y 23°.	75°. 2 + 23° 32′ 13″	47° 14′
d. La suma entre 1800′ y la mitad de 34° 28′.	3 . (45° 7′ 19″ − 23°)	112° 21′ 57″

DinámicaMente

Observen los siguientes instrumentos de medición e indiquen cuáles se utilizan para medir ángulos.

a. Regla

c. Compás

e. Inclinómetro

g. Sextante

b. Anemómetro

d. Goniómetro

f. Teodolito

h. Transportador

26. Clasificación de ángulos

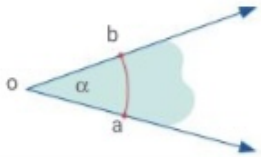
▶ SABERES DINÁMICOS

Para **nombrar un ángulo**, se pueden utilizar diferentes formas.

$\hat{aob}$: se escribe el vértice en el medio y un punto que pertenezca a cada lado;

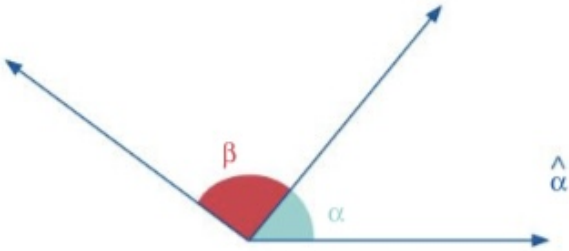
$\hat{o}$: se escribe solo el vértice;

$\hat{\alpha}$: se escribe una letra griega.



Los ángulos se clasifican según su amplitud			
Convexos	**Nulo:** $\hat{\alpha} = 0°$	**Agudo:** $0° < \hat{\alpha} < 90°$	**Recto:** $\hat{\alpha} = 90°$
	Obtuso: $90° < \hat{\alpha} < 180°$	**Llano:** $\hat{\alpha} = 180°$	**1 giro:** $\hat{\alpha} = 360°$
Cóncavos	$180° < \hat{\alpha} < 360°$		

Ángulos consecutivos: son los ángulos que tienen solo un vértice y un lado en común.



$\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son consecutivos

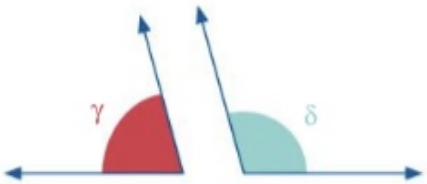
Ángulos complementarios: dos ángulos son complementarios cuando la suma de sus medidas es 90°.

$\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 90°$ ⟶ $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son complementarios. ⟶ Se dice que $\hat{\alpha}$ es el complemento de $\hat{\beta}$ y que $\hat{\beta}$ es el complemento de $\hat{\alpha}$.

Ángulos suplementarios: dos ángulos son suplementarios cuando la suma de sus medidas es 180°.

$\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 180°$ ⟶ $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son suplementarios. ⟶ Se dice que $\hat{\alpha}$ es el suplemento de $\hat{\beta}$ y que $\hat{\beta}$ es el suplemento de $\hat{\alpha}$.

Indiquen si los ángulos $\hat{\gamma}$ y $\hat{\delta}$ son consecutivos y suplementarios.



$\hat{\gamma} = 56°$ y $\hat{\delta} = 124°$.

$\hat{\gamma}$ y $\hat{\delta}$ no son consecutivos porque no tienen un vértice ni un lado en común.

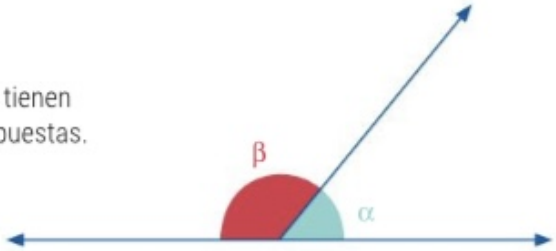
$\hat{\gamma}$ y $\hat{\delta}$ son suplementarios porque $\hat{\gamma} + \hat{\delta} = 56° + 124° = 180°$.

Áreas dinámicas [Matemática y Ciencias Naturales]

Las diferentes inclinaciones de los planetas con respecto al plano del Sistema Solar se miden con ángulos. Por ejemplo, el eje de la Tierra está inclinado 23° con respecto al plano del Sistema Solar. Esta inclinación es la causa de las diferentes estaciones (primavera, verano, otoño e invierno). El eje de Marte tiene una inclinación de 25°, muy próxima a la de la Tierra. Por esta razón, las estaciones en Marte son similares a las de nuestro planeta.

26. Clasificación de ángulos

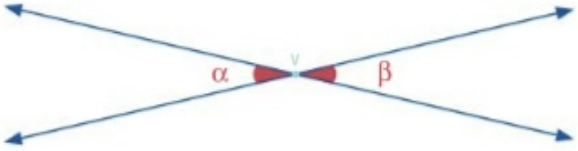
Ángulos adyacentes: dos ángulos son adyacentes cuando tienen un lado en común y los otros dos lados son semirrectas opuestas.



Por lo tanto, **dos ángulos son adyacentes, si son suplementarios y consecutivos**.

Ángulos opuestos por el vértice: dos ángulos son opuestos por el vértice **cuando sus lados son semirrectas opuestas**. Los ángulos opuestos por el vértice tienen la misma medida.

Si $\hat{\alpha} = 35°$, entonces $\hat{\beta} = 35°$.



Los siguientes son ejemplos de problemas que se pueden resolver usando la clasificación de ángulos.

a. Si $\hat{\alpha} = 27°$, ¿cuánto mide $\hat{\beta}$?

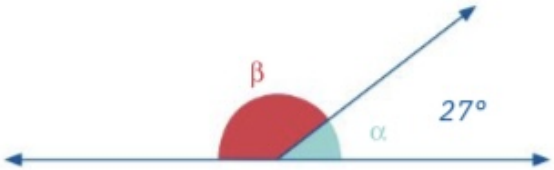
$\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son adyacentes, por lo tanto suman 180°.

$\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 180°$

$27° + \hat{\beta} = 180°$

$\hat{\beta} = 180° - 27°$

$\hat{\beta} = 153°$



b. ¿Cuánto miden los ángulos $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$?

Para encontrar la medida de los ángulos $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$, se igualan las expresiones de cada uno de los ángulos.

$\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son ángulos opuestos por el vértice; miden lo mismo.

$\hat{\alpha} = \hat{\beta}$

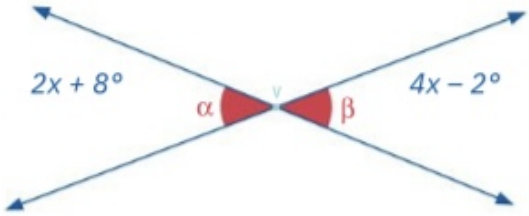
$2x + 8° = 4x - 2°$

$8° + 2° = 4x - 2x$

$10° = 2x$

$10° : 2 = x$ $\qquad \hat{\alpha} = 2 \cdot 5° + 8° = 18°$

$5° = x$ $\qquad \hat{\beta} = 4 \cdot 5° - 2° = 18°$



Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/ancoad* para conocer más acerca de ángulos consecutivos y adyacentes.

*Enlace acortado de https://www.geogebra.org/m/XHh4UbJV

d.

Ángulo	Características
Consecutivos	Tienen solo un vértice y un lado en común
Complementarios	La suma de sus medidas es 90°
Suplementarios	La suma de sus medidas es 180°
Adyacentes	Son suplementarios y consecutivos.
Opuestos por el vértice	Sus lados son semirrectas opuestas y miden lo mismo.

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen sus respuestas.
   a. Dos ángulos suplementarios, ¿pueden medir lo mismo?
   b. Dos ángulos complementarios, ¿siempre son agudos?
   c. Los ángulos adyacentes, ¿son siempre consecutivos?

   a. Sí, en el caso de que ambos midan 90°. b. No, por ejemplo, el complemento de un ángulo recto (90°) es un ángulo de 0°. c. Sí, por definición los ángulos adyacentes son consecutivos y suplementarios.

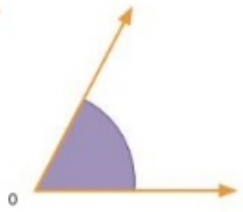
   d. Confeccionen una tabla con las características principales de los ángulos consecutivos, complementarios, suplementarios, adyacentes y opuestos por el vértice. Dibujen un ejemplo para cada caso.

ApAp

26. Clasificación de ángulos

6. Midan con el transportador los siguientes ángulos y clasifíquenlos según su medida.

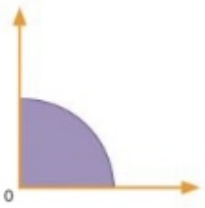
a.



Mide: 60°

Es un ángulo: Agudo

b.



Mide: 90°

Es un ángulo: Recto

c.

Mide: 145°

Es un ángulo: Obtuso

7. **Dibujen en sus carpetas utilizando regla y transportador.** A cargo del alumno.

a. Dos ángulos suplementarios que no sean consecutivos.

b. Dos ángulos complementarios que sean consecutivos.

c. Dos ángulos consecutivos que no sean ni complementarios ni suplementarios.

d. Dos ángulos rectos que sean opuestos por el vértice.

8. **Completen la tabla siempre y cuando sea posible. Cuando no lo sea, expliquen por qué.**

Ángulo	Complemento del ángulo	Suplemento del ángulo
125° 15′ 26″	----	54° 44′ 34′
52° 41′ 14″	37° 18′ 46″	127° 18′ 46″
92° 32′ 43″	----	87° 27′ 17″
35° 44′ 33″	54° 15′ 27″	144° 15′ 27″

TracO

9. **Reúnanse en grupos y respondan. Utilicen gráficos, cuentas o ejemplos para responder.**

a. ¿Cuál es el complemento de un ángulo que mide 15° 15′ 15″?

90° − 15° 15′ 15″ = 74° 44′ 45″

b. ¿Cuál es el suplemento de la mitad de un ángulo recto?

180° − (90° : 2) = 180° − 45° = 135°

c. ¿Cuál es el complemento de la tercera parte de un ángulo recto?

90° − (90° : 3) = 90° − 30° = 60°

d. ¿Cuál es el suplemento del complemento de un ángulo de 34°?

180° − (90° − 34°) = 180° − 56° = 124°

e. ¿Qué tipo de ángulo se obtiene si se calcula el suplemento de un ángulo obtuso?

Se obtiene un ángulo agudo.

26. Clasificación de ángulos

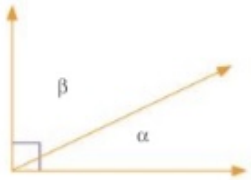
TracO

10. Organícense para trabajar de a dos y analicen la siguiente situación.
Si tres ángulos consecutivos forman un ángulo llano, uno de los ángulos mide 80° y otro, 30°, ¿cuánto mide el tercer ángulo? Señalen con una X la opción correcta.

a. 50° ☐ b. 70° X c. 110° ☐ d. 180° ☐

11. Resuelvan en sus carpetas y luego completen.

a. $\hat{\alpha} = 3x + 35°$
$\hat{\beta} = 2x + 15°$



$\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son ángulos: complementarios

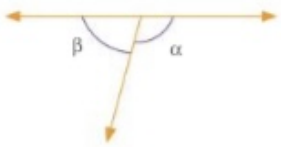
x = 3x + 35° + 2x + 15° = 90° → 5x + 50° = 90° → 5x = 40° → x = 8°

$\hat{\alpha}$ = 3 . 8° + 35° = 24° + 35° = 59°

$\hat{\beta}$ = 2 . 8° + 15° = 16° + 15° = 31°

Verificación:
$\hat{\alpha} + \hat{\beta}$ = 59° + 31° = 90°

b. $\hat{\alpha} = 3x - 15°$
$\hat{\beta} = 4x + 55°$



$\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son ángulos: suplementarios

x = 3x − 15° + 4x + 55° = 180° → 7x + 40° = 180° → 7x = 140° → x = 20°

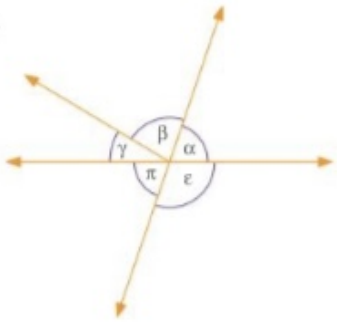
$\hat{\alpha}$ = 3 . 20° − 15° = 60° − 15° = 45°

$\hat{\beta}$ = 4 . 20° + 55° = 80° + 55° = 135°

Verificación:
$\hat{\alpha} + \hat{\beta}$ = 45° + 135° = 180°

12. Observen el gráfico y marquen con una X las opciones correctas.

a. $\hat{\varepsilon}$ es opuesto por el vértice con el ángulo $\hat{\beta}$. ☐
b. $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ y $\hat{\gamma}$ suman 180°. X
c. $\hat{\alpha}$ y $\hat{\varepsilon}$ son adyacentes. X
d. $\hat{\pi}$ y $\hat{\gamma}$ son complementarios. ☐
e. $\hat{\beta}$ y $\hat{\gamma}$ son consecutivos. X



Comu

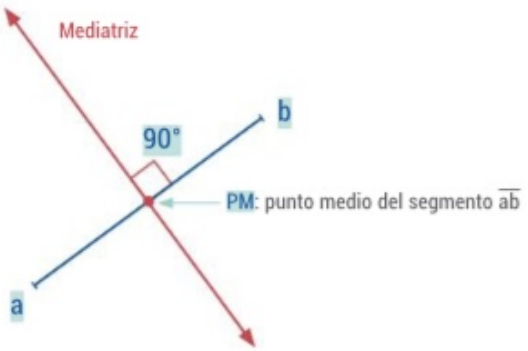
13. Tengan en cuenta el gráfico de la actividad anterior y completen la tabla. Realicen los cálculos necesarios y expliquen los pasos que siguieron.

$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\pi}$	$\hat{\varepsilon}$
63° 13' 24"	81° 34' 4"	35° 12' 32"	63° 13' 24"	116° 46' 36"
AGUDO	AGUDO	AGUDO	AGUDO	OBTUSO

27. Mediatriz de un segmento

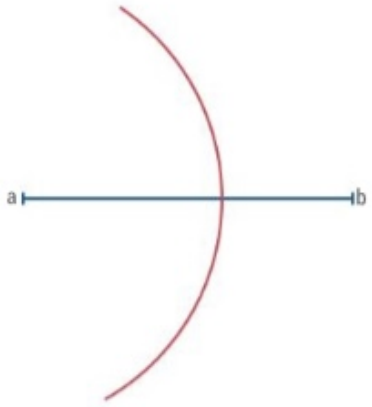
▶ SABERES DINÁMICOS

La **mediatriz** de un segmento es la línea recta perpendicular a dicho segmento trazada por su punto medio. A esa línea recta se la puede definir como **el lugar geométrico cuyos puntos son equidistantes** (están a igual distancia) **de los extremos del segmento**.

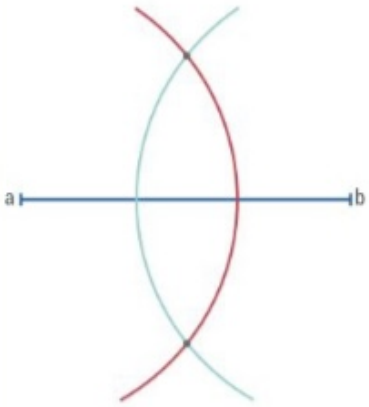


Para **trazar la mediatriz** de un segmento se pueden seguir los siguientes pasos.

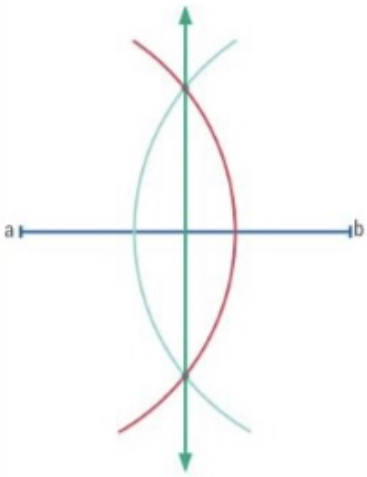
1. Con el compás, se hace centro en uno de los extremos del segmento con una abertura mayor a la mitad del segmento y se traza un arco de circunferencia.



2. Se repite el procedimiento haciendo centro en el otro extremo del segmento, con la misma abertura.



3. Se dibuja la recta que determinan los dos puntos de intersección de las circunferencias.



Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/mediatriz * para mirar un video donde se muestran estos pasos.

* Enlace acortado de https://www.youtube.com/watch?v=XMLiuKjnu0I

TEST DE COMPRENSIÓN

ApAp

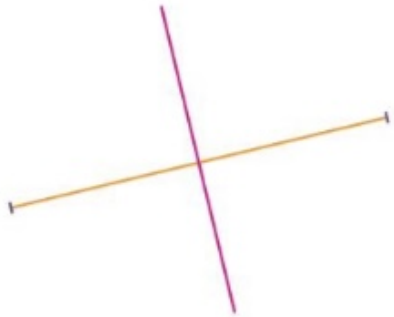
1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. ¿Cómo pueden saber si un punto equidista de los extremos de un segmento dado?
   Si al trazar la mediatriz del segmento, el punto pertenece a la mediatriz, entonces equidista de los extremos del segmento.
   b. Para trazar la mediatriz de un segmento de 6 cm de largo, ¿qué medida puede tener la abertura del compás?
   La abertura del compás debe ser mayor que 3 cm.
   c. ¿Cómo harían para dividir un segmento en otros cuatro de igual longitud sin utilizar regla ni hacer una división? Expliquen los pasos que se deberían seguir.
   Sí, es posible. Primero se traza la mediatriz M del segmento dado y luego la mediatriz de cada uno de los segmentos que quedaron determinados al trazar la mediatriz M.

ACTIVIDADES

27. Mediatriz de un segmento

14. Tracen la mediatriz de cada segmento.

a.



b.

Comu

15. Observen la figura de análisis y calculen la medida del segmento ab. Expliquen los pasos seguidos.
o es el punto medio de $\overline{ab}$.

TIP

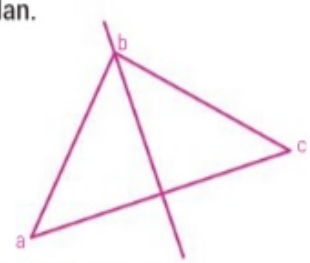
Una figura de análisis es un dibujo en donde se dan datos para resolver un problema, pero que no respeta las medidas.

$5x - 32 = x + 8$

$4x = 40 \rightarrow x = 10$

Entonces → $\overline{ab} = 36$ cm

16. Tracen la mediatriz de un segmento ac y marquen sobre ella un punto cualquiera b, de modo que se forme un triángulo abc. Luego, respondan.



a. ¿Qué clase de triángulo es abc? ¿Cómo se dan cuenta?

El triángulo es isósceles, porque dos de sus lados son iguales por pertenecer b a la mediatriz del segmento.

b. ¿Cuántos triángulos distintos podrían haber construido? ¿Por qué?

Se podrían construir infinitos triángulos, porque existen infinitos posibles puntos b.

DinámicaMente

Dos localidades A y B se encuentran separadas por 100 km. Se quiere construir un supermercado que esté a la misma distancia de ambas localidades.

a. Encuentren todos los lugares donde se podría instalar. Dibujen la situación considerando que 20 km = 1 cm.

El supermercado se podría instalar en cualquier punto perteneciente a la mediatriz del segmento determinado por las dos localidades A y B.

b. Agreguen al enunciado del ejercicio anterior algún otro dato para que el lugar donde se deba construir el supermercado sea único. Expliquen su respuesta.

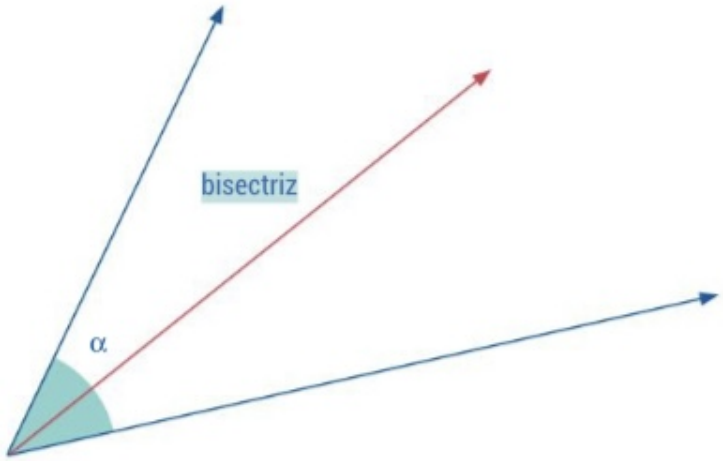
Dos localidades A y B se encuentran separadas por 100 km. Se quiere construir un supermercado que esté a la misma distancia de ambas localidades, sabiendo que esta distancia tiene que ser la menor posible.

En este caso el supermercado debería instalarse en el punto medio del segmento determinado por las dos localidades A y B.

28. Bisectriz de un ángulo

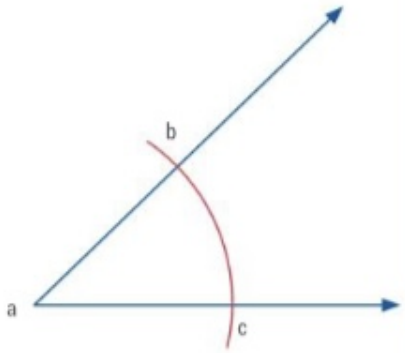
▶ SABERES DINÁMICOS

La **bisectriz** de un ángulo es la semirrecta (lugar geométrico) que contiene a todos los puntos que equidistan de los lados del ángulo y lo divide en otros dos ángulos congruentes, es decir, de igual medida.

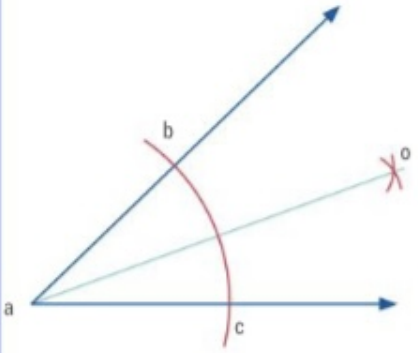


Para **trazar la bisectriz** de un ángulo se pueden seguir los siguientes pasos.

1. Se abre el compás y con una amplitud cualquiera y centro en el vértice del ángulo, se traza un arco que corte los lados del ángulo.



2. Con centro donde el arco intersecto (cortó) a los lados, se trazan dos pequeños arcos que se corten entre sí. Se une el vértice con el punto que quedó determinado.



Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/bisectriz * para observar un video donde se muestran estos pasos.

* Enlace acortado de https://youtu.be/XMLiuKjnuOI?t=86

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen sus respuestas.
   a. ¿Es cierto que si se traza la bisectriz de un ángulo llano, se obtienen dos ángulos rectos? Sí, porque si el ángulo es llano su bisectriz lo divide en dos ángulos rec
   b. La bisectriz de un ángulo obtuso, ¿ siempre lo divide en dos ángulos agudos?
   Sí, siempre porque la mitad de un ángulo obtuso siempre es un ángulo agudo.
   c. Mencionen dos figuras geométricas donde las bisectrices de sus ángulos pasen por sus diagonales.
   Dos figuras posibles son el cuadrado y el rombo.

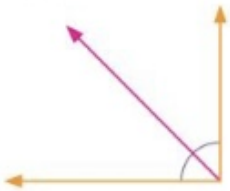
ApAp

ACTIVIDADES

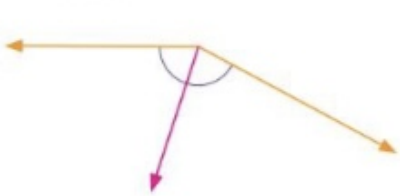
28. Bisectriz de un ángulo

17. Clasifiquen cada ángulo. Luego, tracen su bisectriz.

a. Recto



b. Obtuso



c. Agudo

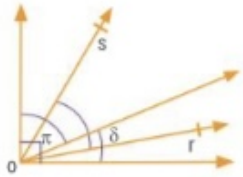
18. Tengan en cuenta los datos y el gráfico. Luego, resuelvan y completen según corresponda.

a. Datos:

$\hat{\delta} = 27° 15' 30''$

$\overrightarrow{or}$ bisectriz de $\hat{\delta}$.

$\overrightarrow{os}$ bisectriz de $\hat{\pi}$.

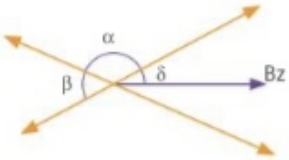


$\hat{\pi} =$ 62° 44' 30" $\quad \hat{\delta} : 2 =$ 13° 37' 45" $\quad \hat{\pi} : 2 =$ 31° 22' 15" $\quad \hat{sor} =$ 45°

b. Datos:

$\hat{\beta} = 27° + 3x$

$\hat{\delta} = 2x + 10°$



$\hat{\alpha} =$ 132° $\quad \hat{\beta} =$ 48° $\quad \hat{\delta} =$ 24°

19. Escriban V (verdadero) o F (falso). Expliquen sus respuestas.

a. La bisectriz de un ángulo recto lo divide en dos ángulos agudos de 25°. F
La bisectriz de un ángulo recto lo divide en dos ángulos de 45°.

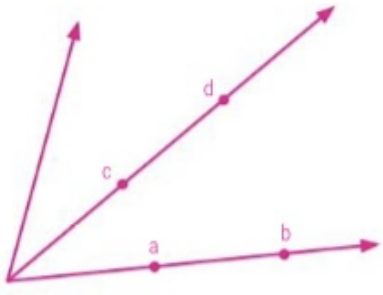
b. La bisectriz de un ángulo obtuso determina dos ángulos cóncavos. F
La bisectriz de un ángulo obtuso determina dos ángulos agudos, es decir, convexos.

c. La bisectriz de un ángulo llano determina dos ángulos rectos. V
Porque la mitad de un ángulo llano es un ángulo recto.

d. La bisectriz de un ángulo agudo determina dos ángulos obtusos. F
La bisectriz de un ángulo agudo determina dos ángulos agudos.

e. La bisectriz de un ángulo de 67° 32' 56" determina dos ángulos iguales de 33° 16' 28". F
La bisectriz de un ángulo de 67° 32' 56" determina dos ángulos de 33° 46' 28".

20. Dibujen un ángulo y su bisectriz. Agreguen dos puntos (c y d) que pertenezcan a la bisectriz del ángulo y dos puntos (a y b) que pertenezcan a uno de sus lados.



Integración final

5

21. Completen según corresponda.

a. 35° + [130° 15'] = 165° 15'

b. 72° + 3 . [6°] = 90°

c. [27° 14' 26"] + 48° = 75° 14' 26"

d. 145° 15' 30" + [30° 44' 30"] = 176°

e. [54° 37'] + 35° 23' = 270° : 3

f. 2 . (15° 32' 56") + 34° 14' 7" = [65° 19' 59"]

22. Escriban el cálculo. Luego, resuélvanlo.

a. La diferencia entre la quinta parte del ángulo 135° 45' 55" y 17° 14' 23".
(135° 45' 55" :5) − 17° 14' 23" = 9° 54' 48"

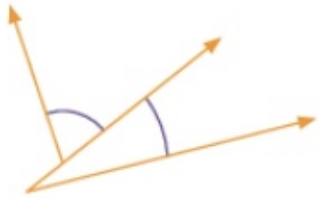
b. La suma entre el doble de 65° 15' y la tercera parte de un ángulo recto.
2 . (65° 15') + 90° :3 = 160° 30'

c. La tercera parte de un ángulo llano más el doble de 25° 18' 36".
180° :3 + 2 . (25° 18' 36") = 110° 37' 12"

d. El triple de la mitad de un ángulo de 96° 45' 36".
3 . (96° 45' 36" : 2) = 145° 8' 24"

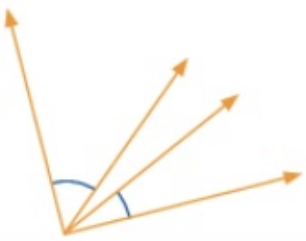
23. Marquen con una X los pares de ángulos que son consecutivos. Expliquen la respuesta.

a. [ ]



b. [X] Es el único par de ángulos que tienen solo un vértice y un lado en común.

c. [ ]



24. Escriban V (verdadero) o F (falso). Expliquen sus respuestas.

a. Los ángulos consecutivos son siempre adyacentes. Los ángulos consecutivos pueden no ser suplementarios y, por ende, no ser adyacentes. [F]

b. Los ángulos opuestos por el vértice pueden ser complementarios. En el caso de que sean ángulos de 45°. [V]

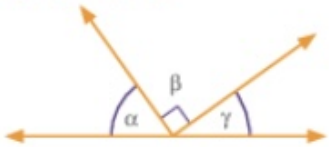
c. Dos ángulos que suman 89° 60' son complementarios. Porque 89° 60' = 90°. [V]

d. Dos ángulos son adyacentes si son suplementarios. Para ser adyacentes además de ser suplementarios deben ser consecutivos. [F]

25. Resuelvan.

a. $\hat{\alpha} = \hat{\gamma} = 2x + 17°$; $\hat{\beta}$ es recto.

2 . (2x + 17°) = 90° → 2x + 17° = 45°
→ 2x = 28° → x = 14°



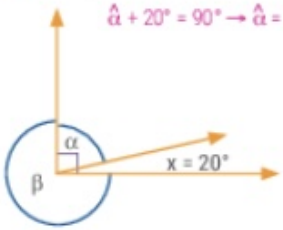
x = [14°]

$\hat{\alpha}$ = [45°]

$\hat{\gamma}$ = [45°]

b. x = 20°

$\hat{\alpha}$ + 20° = 90° → $\hat{\alpha}$ = 70°



$\hat{\alpha}$ = [70°]

$\hat{\beta}$ = [270°]

26. Tengan en cuenta la actividad anterior y respondan.

a. En el ítem a ¿cuáles de estos pares de ángulos son consecutivos?

$\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ [X] $\hat{\beta}$ y $\hat{\gamma}$ [X] $\hat{\alpha}$ y $\hat{\gamma}$ [ ]

b. En el ítem a, ¿$\hat{\alpha}$ y $\hat{\gamma}$ son ángulos opuestos por el vértice? $\hat{\alpha}$ y $\hat{\gamma}$ no son ángulos opuestos por el vértice porque sus lados no son semirrectas opuestas.

c. En el ítem a, ¿qué tipo de ángulo forman $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ y $\hat{\gamma}$?
$\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ y $\hat{\gamma}$ forman un ángulo llano.

d. En el ítem b, ¿qué tipo de ángulo es "x"?
Es un ángulo agudo.

e. En el ítem b, ¿cuáles de estos pares de ángulos son consecutivos?

$\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ [X] $\hat{\beta}$ y x [X] $\hat{\alpha}$ y x [X]

27. Completen con "a veces", "siempre" o "nunca", según corresponda.

a. Los ángulos opuestos por el vértice son adyacentes. nunca

b. Los ángulos adyacentes son suplementarios. siempre

c. Dos ángulos complementarios son iguales. a veces

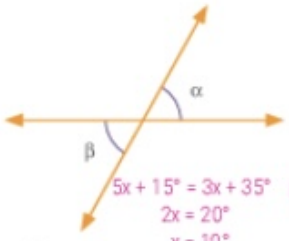
d. La bisectriz de un ángulo agudo lo divide en dos ángulos agudos. siempre

e. La bisectriz de un ángulo llano lo divide en dos ángulos rectos. siempre

f. Los ángulos suplementarios son consecutivos. a veces

28. Observen los datos y los gráficos. Luego, resuelvan.

a. $\hat{\alpha} = 5x + 15°$; $\hat{\beta} = 3x + 35°$



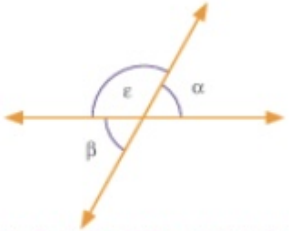
$x =$ 10°

$\hat{\alpha} =$ 65°

$\hat{\beta} =$ 65°

$5x + 15° = 3x + 35°$ por ser opuestos por el vértice
$2x = 20°$
$x = 10°$

b. $\hat{\beta} = x + 20°$; $\hat{\varepsilon} = 3x + 40°$



$x =$ 30°

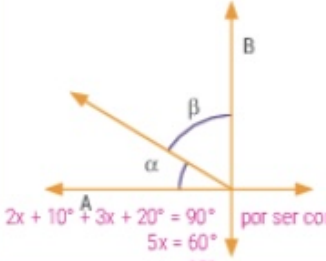
$\hat{\alpha} =$ 50°

$\hat{\beta} =$ 50°

$\hat{\varepsilon} =$ 130°

$x + 20° + 3x + 40° = 180°$ por ser adyacentes
$4x = 120°$
$x = 30°$

c. A y B son perpendiculares.
$\hat{\alpha} = 2x + 10°$; $\hat{\beta} = 3x + 20°$



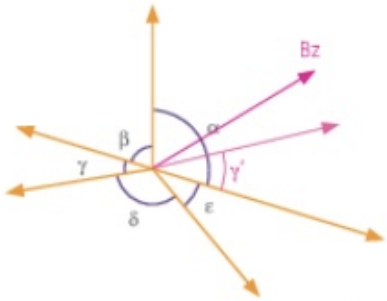
$x =$ 12°

$\hat{\alpha} =$ 34°

$\hat{\beta} =$ 56°

$2x + 10° + 3x + 20° = 90°$ por ser complementarios
$5x = 60°$
$x = 12°$

29. Analicen el gráfico y realicen lo pedido, cuando sea posible.



a. Indiquen dos ángulos adyacentes. $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$.

b. Indiquen dos ángulos complementarios. No existen ángulos complementarios en el gráfico.

c. Indiquen dos ángulos consecutivos no suplementarios. $\hat{\gamma}$ y $\hat{\beta}$.

d. Indiquen dos ángulos no consecutivos. $\hat{\alpha}$ y $\hat{\gamma}$

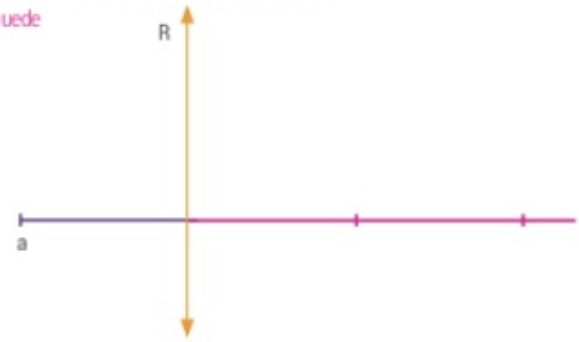
e. Calculen cuánto mide $\hat{\alpha}$, si $\hat{\beta} = 78° 35' 18''$. $\hat{\alpha} = 101° 24' 42''$

f. Dibujen con verde el ángulo opuesto por el vértice de $\hat{\gamma}$. En el gráfico: $\hat{\gamma}'$.

g. Tracen con rojo la bisectriz del ángulo $\hat{\alpha}$. En el gráfico: Bz .

30. Completen el segmento $\overline{ab}$ teniendo en cuenta que la recta R es la mediatriz del segmento que representa la mitad del segmento $\overline{ab}$. ¿Qué elementos necesitan? Se necesitan regla y compás.

Fe de erratas: no se puede resolver en la hoja.



31. Completen cada oración.

a. El ángulo opuesto por el vértice del doble de 17° 28' mide 34° 56' .

b. La bisectriz de la tercera parte del ángulo 105° 37' 18" determina dos ángulos congruentes cuya medida es de 17° 36' 13" .

c. La mediatriz de un segmento que mide el triple de 15,5 cm determina dos segmentos que miden 23,25 cm .

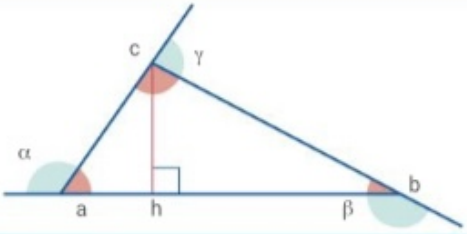
6 Figuras planas

29. Triángulos

▶ SABERES DINÁMICOS

Los triángulos se pueden clasificar según sus lados en:
- **Escaleno:** todos sus lados miden distinto.
- **Isósceles:** tiene al menos dos lados iguales.
- **Equilátero:** todos sus lados son iguales.

Los triángulos se pueden clasificar según sus ángulos en:
- **Acutángulo:** tiene tres ángulos agudos.
- **Rectángulo:** tiene un ángulo recto.
- **Obtusángulo:** tiene un ángulo obtuso.



La **altura** es un segmento perpendicular al lado que pasa por el vértice opuesto.

$\overline{ch}$ es la altura con respecto al lado $\overline{ab}$.

En todo triángulo se cumplen las siguientes **propiedades**:

- La medida de cada lado es menor que la suma de los otros dos.

$\overline{ab} < \overline{bc} + \overline{ac}$ $\quad\quad$ $\overline{bc} < \overline{ac} + \overline{ab}$ $\quad\quad$ $\overline{ac} < \overline{ab} + \overline{bc}$

- La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°.

$$\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 180°$$

- La suma de los ángulos exteriores de un triángulo es 360°.

$$\hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} = 360°$$

- La suma entre un ángulo interior de un triángulo y el ángulo exterior correspondiente es 180°.

$\hat{a} + \hat{\alpha} = 180°$ $\quad\quad$ $\hat{b} + \hat{\beta} = 180°$ $\quad\quad$ $\hat{c} + \hat{\gamma} = 180°$

Dos triángulos son **congruentes o iguales** cuando al superponerlos coinciden en todos sus puntos.

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/altura* para mirar un video acerca de cómo se traza la altura de un triángulo y de sus características.

* Enlace acortado de https://youtu.be/jnaE2z9vCf0

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. La suma de las medidas de dos de los lados de un triángulo, ¿puede ser igual a la medida del tercer lado? No, la suma de las medidas de dos de los lados debe ser mayor a la medida del tercer lado.
   b. Si se conoce la medida de dos ángulos exteriores de un triángulo, ¿se puede calcular la medida de todos los ángulos interiores de ese triángulo? Sí, es posible.

ApAp

   c. Realicen una tabla de doble entrada. En los encabezados de las columnas coloquen "escaleno", "isósceles" y "equilátero" y en los encabezados de las filas, "acutángulo", "rectángulo" y "obtusángulo". En las intersecciones, dibujen un ejemplo que cumpla con las dos condiciones, cuando sea posible. A cargo del alumno.

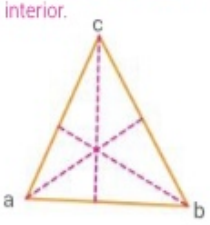
ACTIVIDADES

29. Triángulos

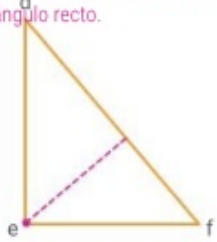
1. Lean atentamente y resuelvan.

Tracen las tres alturas en cada triángulo. Luego, indiquen dónde está ubicado el punto por el que pasan las alturas en cada caso. Compartan sus producciones con el resto de los compañeros.

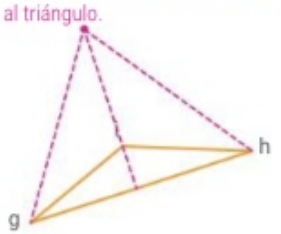
a. Triángulo acutángulo.
El punto donde se cortan las alturas es interior.



b. Triángulo rectángulo.
El punto donde se cortan es el vértice del ángulo recto.

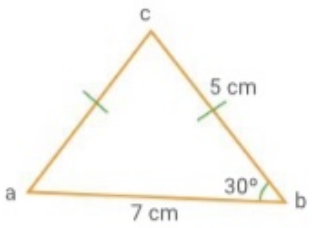


c. Triángulo obtusángulo.
El punto donde se cortan es exterior al triángulo.



2. Calculen la medida de los lados y de los ángulos que faltan. Expliquen las respuestas.

a.



$\overline{ac}$ = 5 cm por ser igual a $\overline{bc}$.

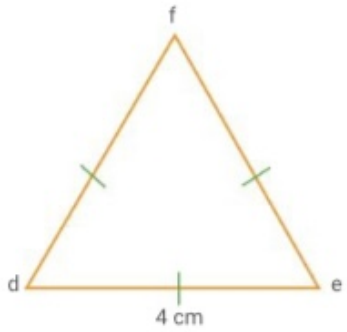
$\hat{a}$ = 30° por ser igual a $\hat{b}$.

$\hat{c} + \hat{a} + \hat{b} = 180° \rightarrow \hat{c} + 30° + 30° = 180° \rightarrow \hat{c} = 180° - 60° = 120°$

$\overline{ac}$ = 5 cm

$\hat{a}$ = 30° $\hat{c}$ = 120°

b.



$\overline{df} = \overline{ef}$ = 4 cm por ser iguales a $\overline{de}$.

$\hat{d} = \hat{e} = \hat{f}$ por triángulo equilátero.

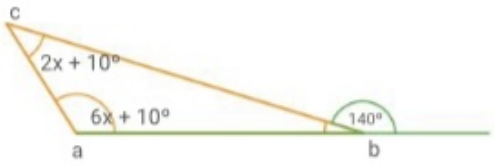
$\hat{d} + \hat{e} + \hat{f} = 180° \rightarrow 3 \cdot \hat{d} = 180° \rightarrow \hat{d} = 180° : 3 \rightarrow \hat{d} = 60°$

$\overline{df}$ = 4 cm $\overline{ef}$ = 4 cm

$\hat{d}$ = 60° $\hat{e}$ = 60° $\hat{f}$ = 60°

3. Calculen el valor de "x" y la medida de los ángulos interiores del triángulo. Expliquen las respuestas.

a.



$\hat{b} = 180° - 140° = 40°$

$\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 180° \rightarrow 6x + 10° + 40° + 2x + 10° = 180° \rightarrow 8x + 60° = 180°$

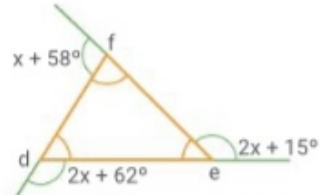
$\rightarrow 8x = 180° - 60° \rightarrow x = 120° : 8 \rightarrow x = 15°$

$\hat{a} = 6 \cdot 15° + 10° = 100°$; $\hat{c} = 2 \cdot 15° + 10° = 40°$

x = 15°

$\hat{a}$ = 100° $\hat{b}$ = 40° $\hat{c}$ = 40°

b.



$\hat{d}(ext) + \hat{e}(ext) + \hat{f}(ext) = 360° \rightarrow 2x + 62° + 2x + 15° + x + 58° = 360°$

$\rightarrow 5x + 135° = 360° \rightarrow 5x = 360° - 135° \rightarrow x = 225° : 5 \rightarrow x = 45°$

$\hat{d}(ext) = 2 \cdot 45° + 62° = 152° \rightarrow \hat{d} = 180° - 152° = 28°$

$\hat{e}(ext) = 2 \cdot 45° + 15° = 105° \rightarrow \hat{e} = 180° - 105° = 75°$

$\hat{f}(ext) = 45° + 58° = 103° \rightarrow \hat{f} = 180° - 103° = 77°$

x = 45°

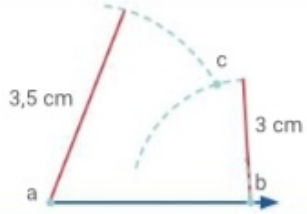
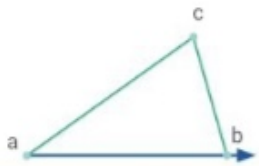
$\hat{d}$ = 28° $\hat{e}$ = 75° $\hat{f}$ = 77°

30. Construcción de triángulos

▶ SABERES DINÁMICOS

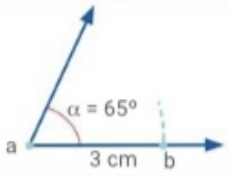
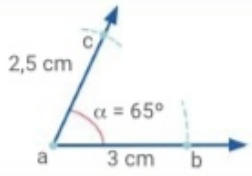
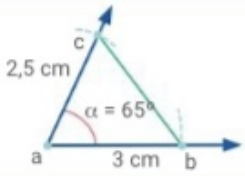
Construcción de triángulos dados sus tres lados

Datos: $\overline{ab}$ = 4 cm; $\overline{bc}$ = 3 cm; $\overline{ac}$ = 3,5 cm

1. Con el compás se mide el segmento $\overline{ab}$; con esa abertura se traza un arco en una semirrecta donde queda determinado el punto b.	2. Con centro en a y abertura igual a $\overline{ac}$ se traza un arco. Se repite el mismo procedimiento con el segmento $\overline{bc}$.	3. El punto c queda determinado por la intersección de los dos arcos. Se trazan los lados del triángulo.
		

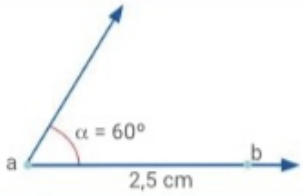
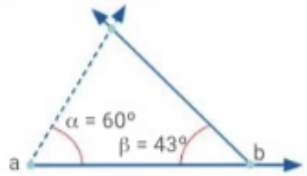
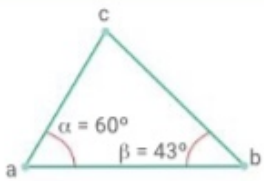
Construcción de triángulos dados dos lados y el ángulo comprendido entre ellos

Datos: $\overline{ab}$ = 3 cm; $\overline{ac}$ = 2,5 cm; $\hat{\alpha}$ = 65°

1. Se traza el ángulo con transportador. Con centro en a, se traza un arco con radio igual a $\overline{ab}$ que corte a uno de los lados en b.	2. Con centro en a, se traza un arco con radio igual a $\overline{ac}$ que corte a uno de los lados en c.	3. Se traza el segmento $\overline{bc}$ que forme un triángulo.
		

Construcción de triángulos dados un lado y los ángulos adyacentes a ese lado

Datos: $\overline{ab}$ = 2,5 cm; $\hat{\alpha}$ = 60°; $\hat{\beta}$ = 43°

1. Se traza el $\hat{\alpha}$. Se traza un arco con centro en a y radio igual a $\overline{ab}$ que interseque a uno de sus lados en b.	2. Sobre b se traza el $\hat{\beta}$ y se prolongan los lados de ambos ángulos.	3. La intersección de las prolongaciones de los lados de los ángulos determinan el punto c del triángulo.
		

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. ¿Cuántos triángulos se pueden construir si se conoce la medida de dos de sus ángulos? Infinitos triángulos.
   b. ¿Cuántos triángulos se pueden construir si se conoce la medida de dos de sus lados? Infinitos triángulos.

ApAp

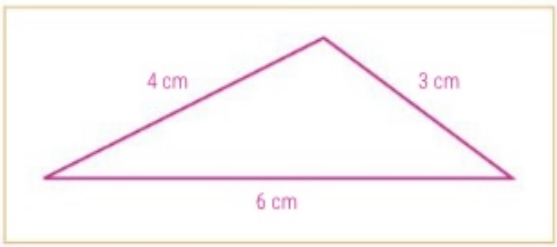
   c. Confeccionen una lista con los datos que se deben conocer para que la construcción de un triángulo sea única. Pueden proponer varios casos distintos. A cargo del alumno.

ACTIVIDADES

30. Construcción de triángulos

4. Construyan, si es posible, con regla y compás, los triángulos pedidos. Indiquen cuántos triángulos es posible construir en cada caso.

a. Lados de 3 cm, 4 cm y 6 cm.

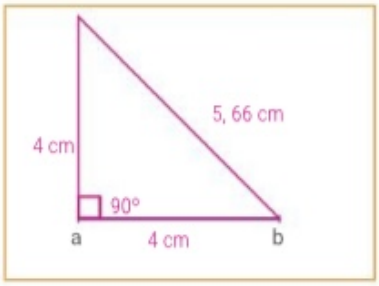


b. Lados de 2 cm, 3 cm y 6 cm.

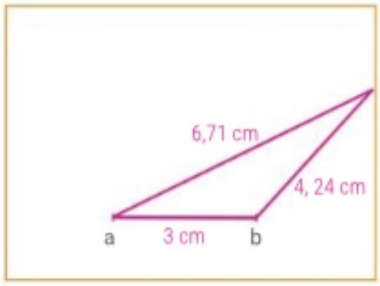
No es posible la construcción. La suma de dos de los lados es menor al tercer lado.

5. Construyan el triángulo abc según lo pedido en cada caso.

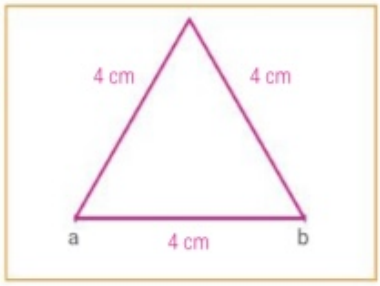
a. Isósceles rectángulo.



b. Escaleno.



c. Equilátero.

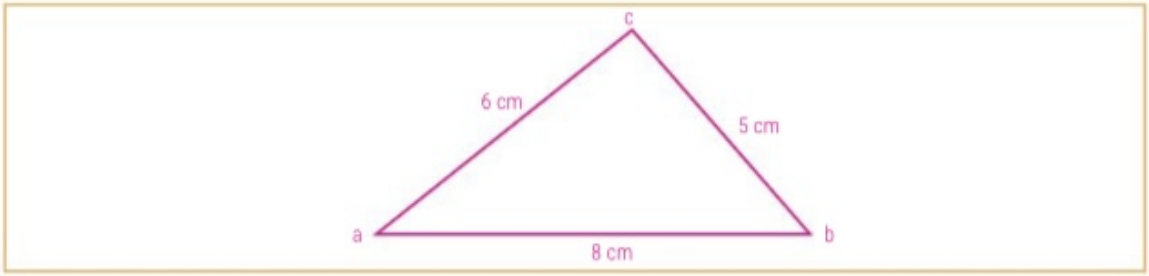


6. Lean atentamente y resuelvan.

a. Inventen la medida de los segmentos $\overline{ab}$, $\overline{bc}$ y $\overline{ac}$ para que se pueda construir un triángulo.

Unas medidas posibles serían $\overline{ab}$ = 8 cm; $\overline{ac}$ = 6 cm y $\overline{bc}$ = 5 cm.

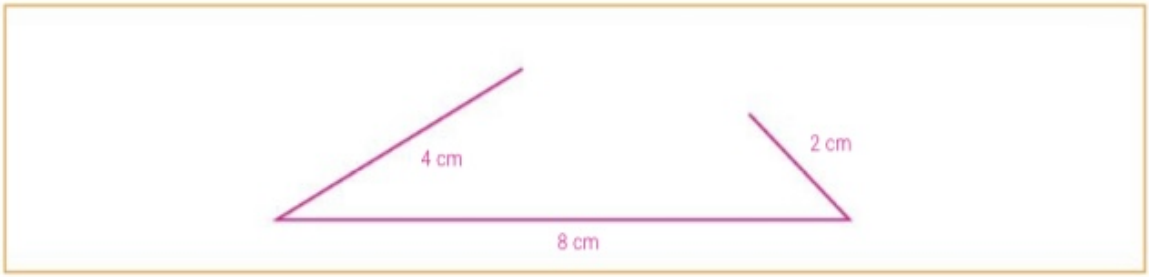
b. Construyan el triángulo con las medidas que propusieron en el ítem anterior.



c. Inventen la medida de los segmentos $\overline{ab}$, $\overline{bc}$ y $\overline{ac}$ para que no se pueda construir un triángulo.

Unas medidas posibles serían $\overline{ab}$ = 8 cm; $\overline{ac}$ = 4 cm y $\overline{bc}$ = 2 cm.

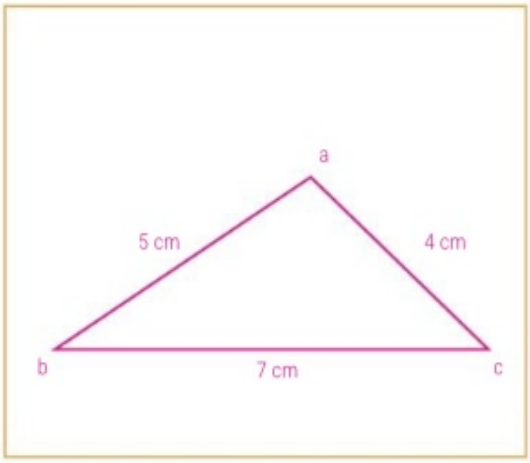
d. Verifiquen construyendo el triángulo con las medidas que propusieron en el ítem anterior.



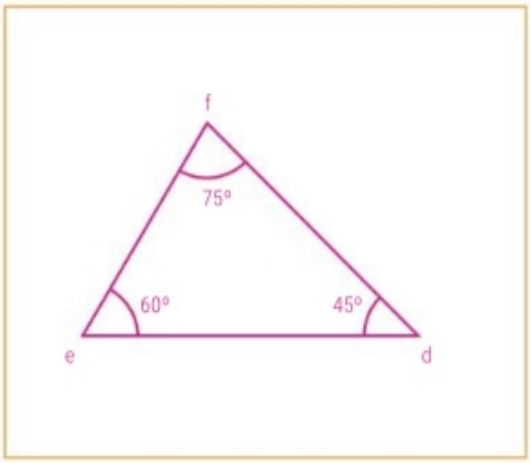
30. Construcción de triángulos

7. Construyan los siguientes triángulos.

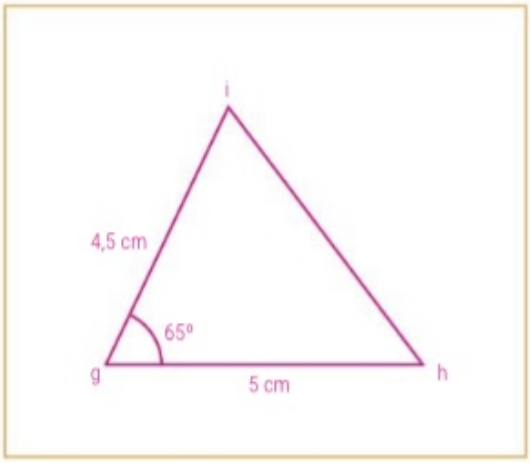
a. $\triangle abc$; $\overline{ab}$ = 5 cm; $\overline{bc}$ = 7 cm; $\overline{ac}$ = 4 cm.



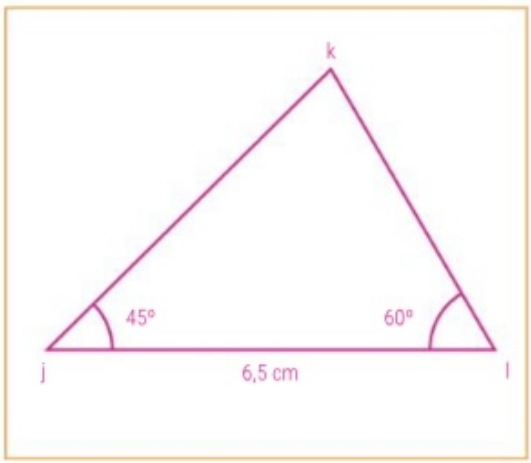
b. $\triangle def$; $\hat{d}$ = 45°; $\hat{e}$ = 60°; $\hat{f}$ = 75°.



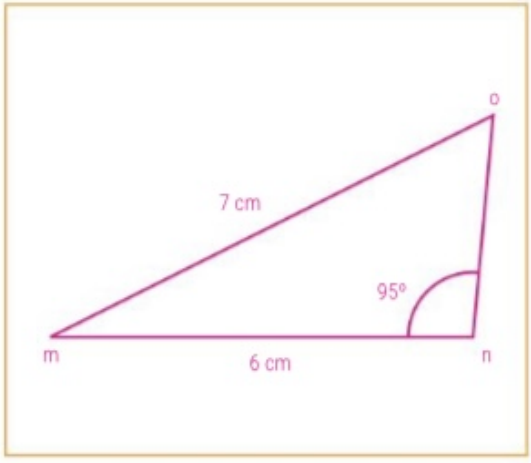
c. $\triangle ghi$; $\hat{g}$ = 65°; $\overline{gh}$ = 5 cm; $\overline{gi}$ = 4,5 cm.



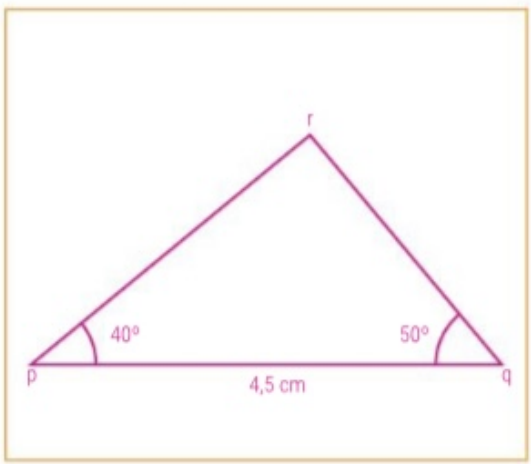
d. $\triangle jkl$; $\overline{jl}$ = 6,5 cm; $\hat{j}$ = 45°; $\hat{l}$ = 60°.



e. $\triangle mno$; $\overline{mn}$ = 6 cm; $\overline{mo}$ = 7 cm; ángulo $\hat{n}$ = 95°.



f. $\triangle pqr$; $\overline{pq}$ = 4,5 cm; $\hat{p}$ = 40°; $\hat{q}$ = 50°.



30. Construcción de triángulos

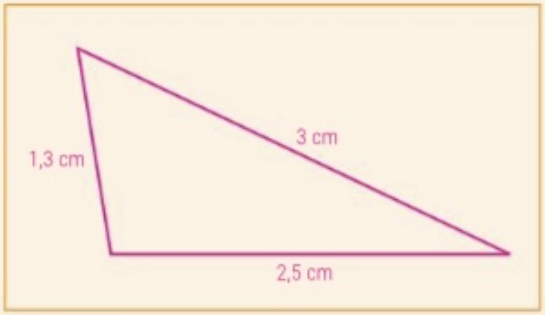
Trac0

8. Reúnanse en grupos y resuelvan.

a. Si se sabe que dos de los lados de un triángulo miden 2,5 cm y 1,3 cm, ¿qué medida puede tener el tercer lado para que se pueda formar el triángulo? Expliquen la respuesta.

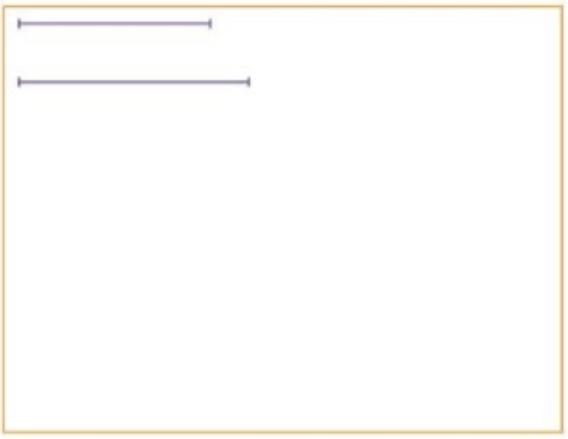
El tercer lado debe ser menor que 3,8 cm y mayor que 1,2 cm.

b. Construyan un triángulo que tenga los lados del ítem anterior.



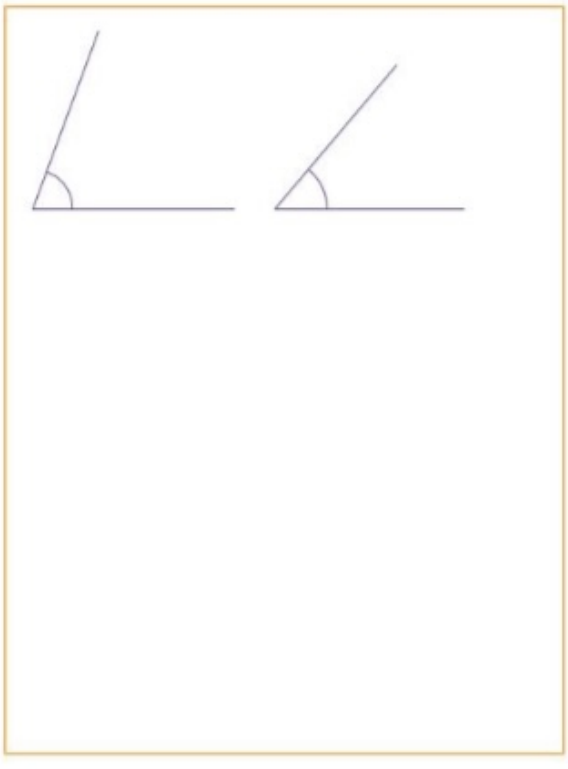
9. Construyan los siguientes triángulos usando regla y compás.

a. Un triángulo isósceles usando los siguientes segmentos como lados. A cargo del alumno.



b. Un triángulo equilátero usando este segmento como lado. A cargo del alumno.

c. Un triángulo usando los siguientes ángulos. A cargo del alumno.



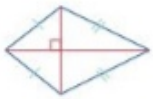
d. Tengan en cuenta los ítems anteriores e indiquen cuántos triángulos diferentes se pueden construir en cada caso.

a. Dos.
b. Uno.
c. Infinitos.

31. Cuadriláteros

▶ SABERES DINÁMICOS

Los **cuadriláteros** son figuras de cuatro lados que cumplen las siguientes propiedades.

	Nombre	Figura	Lados	Diagonales	Ángulos
Trapezoides	Trapezoide		Sus lados no son paralelos. El **romboide** tiene dos pares de lados consecutivos e iguales.		
	Romboide			La principal es mediatriz de la otra y bisectriz de los ángulos distintos.	Tiene un par de ángulos opuestos iguales.
Trapecios	Trapecio rectangular		Tiene un solo par de lados opuestos paralelos. En el **trapecio isósceles** los lados no paralelos son iguales.	No se cortan en el punto medio. En el **trapecio isósceles** son iguales.	Los ángulos no opuestos ni adyacentes a las bases son suplementarios. En el **trapecio isósceles** los ángulos adyacentes a la base son iguales.
	Trapecio isósceles				
	Trapecio escaleno				
Paralelogramos	Rombo		Tiene cuatro lados iguales. Los lados opuestos son paralelos.	Son perpendiculares y se cortan en su punto medio.	Los ángulos opuestos son iguales. Los ángulos consecutivos son suplementarios.
	Paralelogramo		Tiene dos pares de lados paralelos y opuestos iguales.	Se cortan mutuamente en el punto medio.	
	Rectángulo			Son iguales y se cortan en su punto medio.	Tiene cuatro ángulos rectos.
	Cuadrado		Tiene los cuatro lados iguales y paralelos dos a dos.	Son iguales, perpendiculares y se cortan en su punto medio. Son bisectrices de los ángulos opuestos.	

La suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es 360°.

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. ¿Qué cuadrilátero es rombo y rectángulo a la vez? El cuadrado.
   b. Los trapecios, ¿son paralelogramos? No, porque los trapecios solo tienen un par de lados opuestos paralelos.
   c. Confeccionen una tabla con las principales diferencias entre los trapezoides, trapecios y paralelogramos. A cargo del alumno.

ApAp

ACTIVIDADES

31. Cuadriláteros

10. Escriban V (verdadero) o F (falso). Expliquen las respuestas.

a. Un romboide es también rombo. F

Porque los lados de un romboide no son paralelos.

b. Un rectángulo es un paralelogramo. V

Porque tiene dos pares de lados paralelos y opuestos iguales.

c. Un romboide es un trapezoide. V

Porque los lados de un romboide no son paralelos.

11. Escriban el nombre de los cuadriláteros que cumplan con las condiciones pedidas en cada caso. Pueden realizar los dibujos en sus carpetas.

a. Las diagonales son iguales y se cortan en su punto medio.

Rectángulo y cuadrado.

b. Es un paralelogramo que no es rectángulo.

Paralelogramo propiamente dicho y rombo.

c. No tiene lados paralelos.

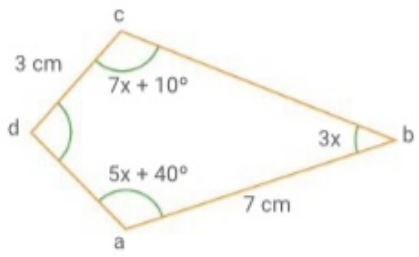
Trapezoide y romboide.

d. Los lados opuestos son iguales y los ángulos consecutivos, suplementarios.

Rombo, paralelogramo propiamente dicho, rectángulo y cuadrado.

12. Calculen el valor de "x" y la medida de los lados y de los ángulos. Expliquen las respuestas.

a. Romboide.



$\hat{a} = \hat{c} \rightarrow 5x + 40° = 7x + 10° \rightarrow 30° = 2x \rightarrow x = 15°$

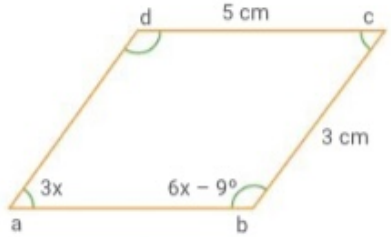
$\hat{a} = 5 \cdot 15° + 40° = 115°$; $\hat{b} = 3 \cdot 15° = 45°$; $\hat{c} = 7 \cdot 15° + 10° = 115°$

$\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} + \hat{d} = 360° \rightarrow 115° + 45° + 115° + \hat{d} = 360° \rightarrow \hat{d} = 360° - 275° = 85°$

$\overline{bc} = 7$ cm por ser igual a $\overline{ab}$; $\overline{ad} = 3$ cm por ser igual a $\overline{cd}$.

x =	15°	$\hat{a}$ =	115°	$\hat{b}$ =	45°	$\hat{c}$ =	115°
$\hat{d}$ =	85°	$\overline{bc}$ =	7 cm	$\overline{ad}$ =	3 cm		

b. Paralelogramo.



$\hat{a} + \hat{b} = 180° \rightarrow 3x + 6x - 9° = 180° \rightarrow 9x = 189° \rightarrow x = 21°$

$\hat{a} = 3 \cdot 21° = 63°$; $\hat{b} = 6 \cdot 21° - 9° = 117°$; $\hat{c} = 63°$; $\hat{d} = 117°$

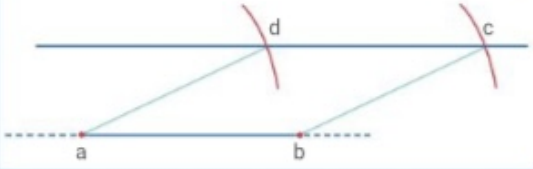
$\overline{ab} = 5$ cm por ser igual a $\overline{cd}$; $\overline{ad} = 3$ cm por ser igual a $\overline{bc}$.

x =	21°	$\hat{a}$ =	63°	$\hat{b}$ =	117°	$\hat{c}$ =	63°
$\hat{d}$ =	117°	$\overline{ab}$ =	5 cm	$\overline{ad}$ =	3 cm		

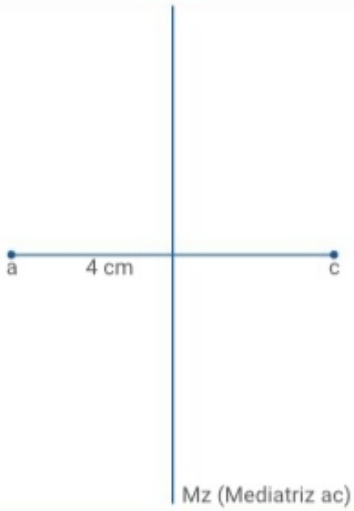
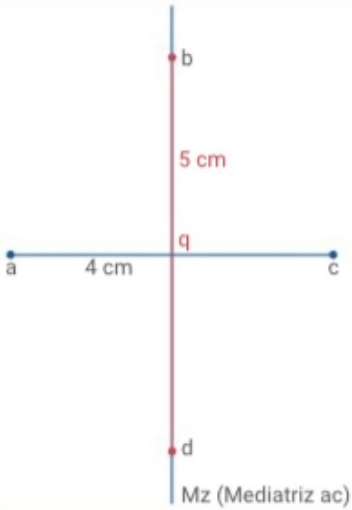
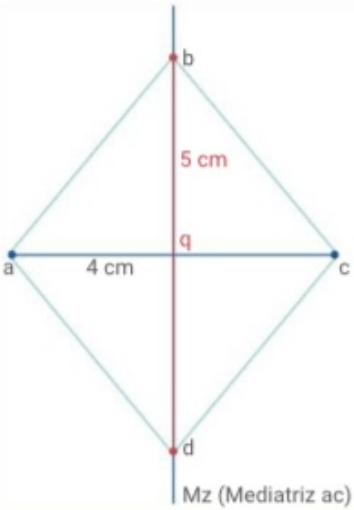
32. Construcción de cuadriláteros

▶ SABERES DINÁMICOS

Para **construir un paralelogramo**, teniendo como datos los lados, pueden seguir estos pasos.
$\overline{ab}$ = 5 cm; $\overline{ad}$ = 4,5 cm.

1. Se trazan dos rectas paralelas y se determina sobre una de ellas el lado $\overline{ab}$.	2. Con centro en a y abertura igual al segmento $\overline{ad}$, se traza un arco que corta a la recta paralela en d.	3. Con la misma abertura y centro en b, se repite el procedimiento anterior para obtener el punto c. Se trazan los segmentos $\overline{ad}$ y $\overline{bc}$ para determinar el paralelogramo.
		

Para **construir un rombo** conociendo la medida de sus diagonales, pueden seguir estos pasos.
$\overline{ac}$ = 4 cm; $\overline{bd}$ = 5 cm

1. Se traza una semirrecta, sobre ella se determina la diagonal $\overline{ac}$ y se traza la mediatriz.	2. Sobre la mediatriz se traza el segmento $\overline{bd}$, tal que su punto medio coincida con el punto medio del segmento $\overline{ac}$.	3. Se trazan los segmentos que forman el rombo.
		

TEST DE COMPRENSIÓN

ApAp

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. ¿Es posible construir un único paralelogramo conociendo la medida de sus lados? No, se pueden construir infinitos paralelogramos, ya que depende de su altura.
   b. ¿Qué datos son necesarios para construir un único cuadrado? Solamente la medida de un lado.
   c. Escriban un punteo con los pasos que se deben seguir para construir un rombo que tiene un lado de 5 cm y un ángulo de 60°. A cargo del alumno.

ACTIVIDADES

32. Construcción de cuadriláteros

13. Construyan cada cuadrilátero con regla no graduada y compás teniendo en cuenta los datos. Escriban el nombre del cuadrilátero construido.

a. Las diagonales son iguales, perpendiculares y se cortan en su punto medio.

Diagonal: ⟷

A cargo del alumno.

Cuadrilátero: Cuadrado.

b. Tiene los cuatro lados iguales, paralelos dos a dos. Sus ángulos interiores no son rectos.

Lado: ⟷

A cargo del alumno.

Cuadrilátero: Rombo.

c. No tiene lados paralelos y sus lados consecutivos son iguales.

Lado: ⟷

Lado: ⟷

A cargo del alumno.

Cuadrilátero: Romboide.

d. Tiene un par de lados opuestos paralelos y solo dos ángulos rectos.

Base: ⟷

Altura: ⟷

A cargo del alumno.

Cuadrilátero: Trapecio rectangular.

e. Tiene dos pares de lados paralelos y opuestos iguales.

Lado: ⟷

Lado: ⟷

A cargo del alumno.

Cuadrilátero: Paralelogramo propiamente dicho o rectángulo.

f. Tiene dos pares de lados paralelos, sus lados consecutivos no son iguales y no forman ángulos rectos.

Lado: ⟷

Lado: ⟷

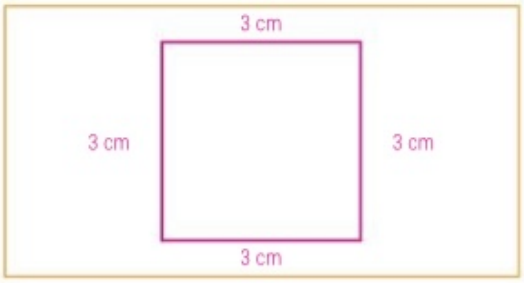
A cargo del alumno.

Cuadrilátero: Paralelogramo propiamente dicho.

32. Construcción de cuadriláteros

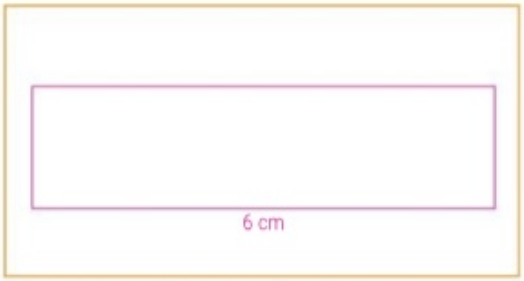
14. Construyan los cuadriláteros pedidos en cada caso. Indiquen si existe una única figura.

a. Un cuadrado cuyo perímetro es de 12 cm.



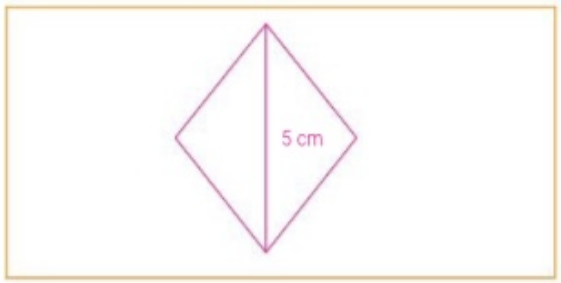
Cuadrado de 3 cm de lado. Es única la figura.

b. Un rectángulo cuya base mida 6 cm.



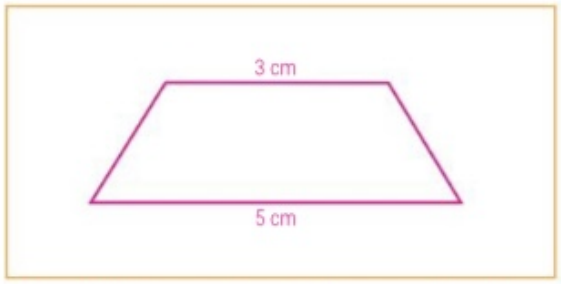
Existen infinitos rectángulos de base 6 cm.

c. Un rombo con una diagonal que mida 5 cm.



Existen infinitos robos con una diagonal de 5 cm.

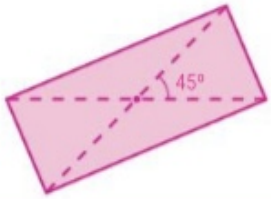
d. Un trapecio isósceles cuya base mayor sea de 5 cm y la base menor de 3 cm.



Existen infinitos trapecios isósceles de base mayor 5 cm y base menor de 3 cm.

15. Lean atentamente y resuelvan.

a. Dibujen un rectángulo cuyas diagonales midan 5 cm y formen entre sí un ángulo de 45°.



b. Con los mismos datos, ¿se puede dibujar un rectángulo distinto?

No, el rectángulo es único.

DinámicaMente

Lean atentamente y resuelvan. A cargo del alumno.

Una herramienta muy útil para geometría es el programa Geogebra, que se puede descargar en forma gratuita tanto en celulares como en la computadora.

Para la construcción de un cuadrilátero, desde la barra de herramientas se elige "Polígonos", se dibuja marcando cuatro puntos y se regresa al primero. Por ejemplo: a, b, c, d y a.

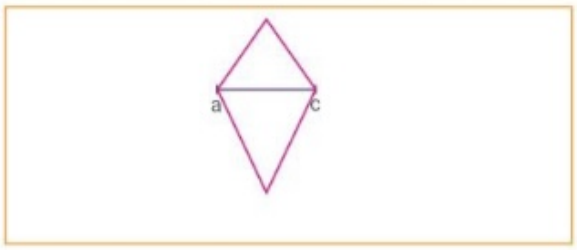
- Realicen los gráficos de la actividad 15 usando Geogebra.

32. Construcción de cuadriláteros

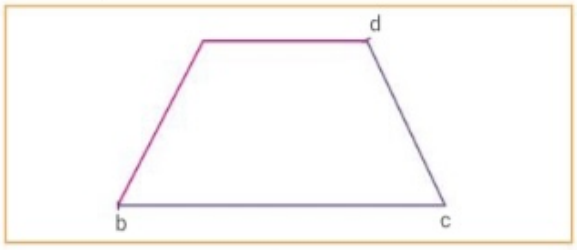
Comu

16. Construyan los siguientes cuadriláteros usando regla y compás. Luego, comenten los pasos que realizaron para construirlos.

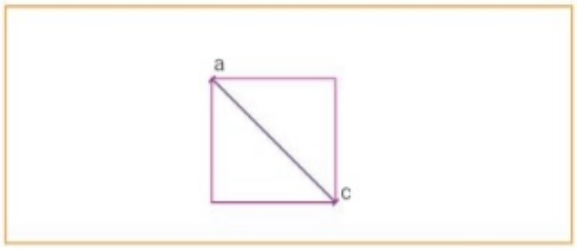
a. Un romboide cuya diagonal es el segmento $\overline{ac}$.



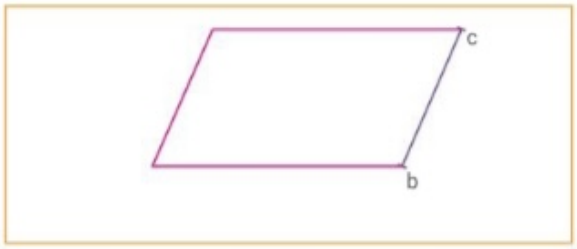
b. Un trapecio isósceles donde $\overline{bc}$ es la base y $\overline{cd}$ es uno de los lados.



c. Un cuadrado donde $\overline{ac}$ es la diagonal.

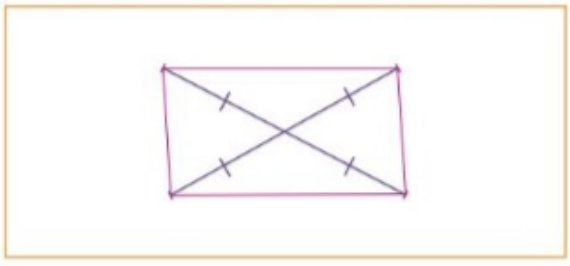


d. Un paralelogramo donde $\overline{bc}$ es uno de los lados.



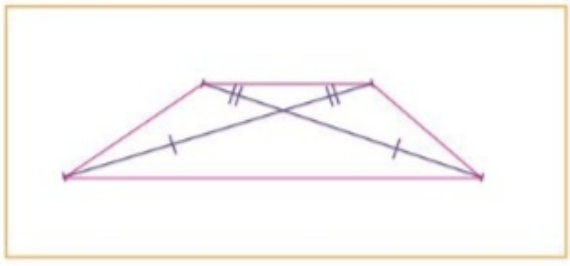
17. Escriban los nombres de los cuadriláteros que tienen los siguientes segmentos como diagonales.

a.



Cuadrilátero: Rectángulo.

b.



Cuadrilátero: Trapecio isósceles.

18. Marquen con una X si se puede construir un triángulo en cada caso.
Expliquen las respuestas.

a. $\overline{ab} = 5$ cm, $\overline{bc} = 4$ cm, $\overline{ca} = 8$ cm. X
Sí.

b. $\overline{ab} = 7$ cm, $\overline{bc} = 3$ cm, $\overline{ac} = 9$ cm. X
Sí.

c. $\hat{a} = 45°$, $\hat{b} = 120°$, $\hat{c} = 25°$. No, porque la suma de los ángulos es mayor a 180°.

d. $\overline{ab} = 5$ cm, $\hat{a} = 60°$, $\hat{b} = 60°$. X
Sí, es un triángulo equilátero.

19. Realicen las siguientes construcciones.

a. Construyan los triángulos del punto anterior, si es posible.
A cargo del alumno.

b. Construyan los triángulos del punto anterior, si es posible utilizando el GeoGebra.
A cargo del alumno.

20. Inventen las medidas para tres segmentos, de manera que con ellos se pueda construir un triángulo. Constrúyanlo. Por ejemplo: 3 cm; 4 cm; 5,5 cm.
Construcción a cargo del alumno.

21. Planteen la ecuación y calculen la medida de los lados o de los ángulos pedidos. Expliquen las respuestas.

a. Datos:

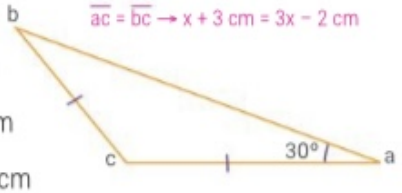
$\hat{a} = 30°$

$\overline{ac} = x + 3$ cm

$\overline{bc} = 3x - 2$ cm

$\overline{ab} = 3x + 2{,}5$ cm

$\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 180°$
$30° + 30° + \hat{c} = 180°$
$\overline{ac} = \overline{bc} \rightarrow x + 3 \text{ cm} = 3x - 2 \text{ cm}$



$x =$ 2,5 cm $\quad \overline{ac} =$ 5,5 cm $\quad \overline{bc} =$ 5,5 cm

$\overline{ab} =$ 10 cm $\quad \hat{b} =$ 30° $\quad \hat{c} =$ 120°

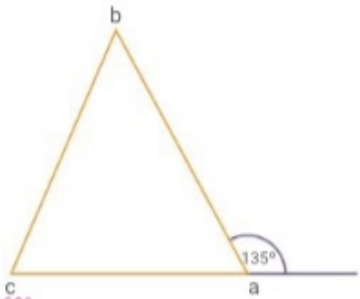
b. Datos:

$\hat{b} = 4x - 2°$;

$\hat{c} = 2x + 5°$;

$\hat{\alpha} = 135°$

$\hat{a} = 180° - \hat{\alpha}$
$\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 180°$
$45° + 4x - 2° + 2x + 5° = 180°$



$x =$ 22° $\quad \hat{a} =$ 45°

$\hat{b} =$ 86° $\quad \hat{c} =$ 49°

22. Construyan si es posible con regla y compás los triángulos pedidos en cada caso.

a. Que los lados midan 4 cm, 5 cm y 9 cm.
No, ya que uno de los lados es igual a la suma de los otros dos.

b. Que los lados midan 3 cm, 5 cm y 7 cm.
Sí.

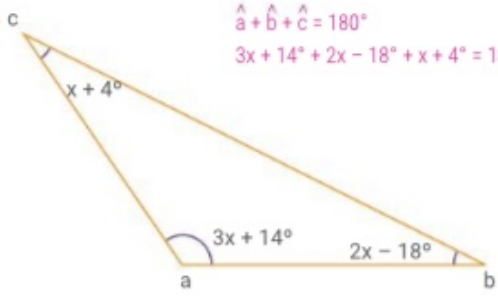
c. Que dos de los lados midan 6 cm y el tercer lado, 4 cm.
Sí.

d. Verifiquen su construcción utilizando GeoGebra.
A cargo del alumno.

23. Planteen la ecuación y calculen el valor de los ángulos interiores de cada triángulo.

a.

$\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 180°$
$3x + 14° + 2x - 18° + x + 4° = 180°$

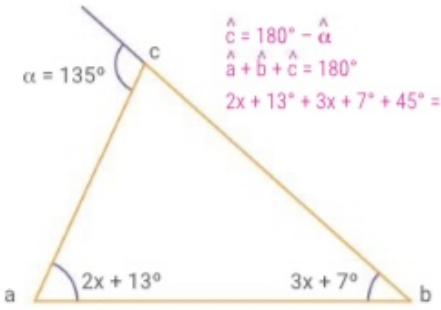


$x =$ 30° $\quad \hat{a} =$ 104°

$\hat{b} =$ 42° $\quad \hat{c} =$ 34°

b.

$\hat{c} = 180° - \hat{\alpha}$
$\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 180°$
$2x + 13° + 3x + 7° + 45° = 180°$

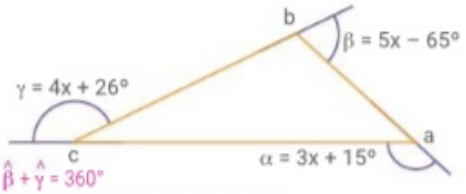


$x =$ 23° $\quad \hat{a} =$ 59°

$\hat{b} =$ 76° $\quad \hat{c} =$ 45°

c.

$\hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} = 360°$
$3x + 15° + 5x - 65° + 4x + 26° = 360°$



$x =$ 32° $\quad \hat{a} =$ 69°

$\hat{b} =$ 85° $\quad \hat{c} =$ 26°

24. **Marquen con una X cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas.**

a. Todos los trapecios son trapezoides. ☐

b. Todo cuadrado es un paralelogramo. X

c. Todo cuadrado es un rombo. X

d. Todo paralelogramo es un rectángulo. ☐

25. **Completen la frase teniendo en cuenta las propiedades de los cuadriláteros.**

a. Los lados del [cuadrado o rombo] son iguales.

b. Las diagonales de los [trapecios] no se cortan en su punto medio.

c. Los [rectángulos o cuadrados] tienen los cuatro ángulos rectos.

d. El [paralelogramo, el rectángulo o el cuadrado o rombo] tiene dos pares de lados opuestos iguales.

26. **Planteen la ecuación y resuelvan. Luego, calculen los ángulos. Expliquen la respuesta.**

a. Datos: $\hat{a} = \hat{b} \rightarrow 2x + 36° = 3x + 20°$

$\hat{a} = 2x + 36°$

$\hat{b} = 3x + 20°$

$\hat{a}$ = 68° $\hat{c}$ = 112°

$\hat{b}$ = 68° $\hat{d}$ = 112°

b. Datos: $\hat{a} = \hat{c} \rightarrow 3x + 68° = 5x + 18°$

$\hat{a} = 3x + 68°$

$\hat{c} = 5x + 18°$

$\hat{a}$ = 143° $\hat{c}$ = 143°

$\hat{b}$ = 37° $\hat{d}$ = 37°

27. **Construyan los siguientes cuadriláteros usando regla y compás. Luego, expliquen cómo lo resolvieron.** A cargo del alumno.

a. Un trapecio isósceles cuya base mayor es $\overline{ab}$ = 4,2 cm.

b. Un cuadrado tal que una de las diagonales es $\overline{ac}$ = 3,4 cm.

c. Un paralelogramo tal que $\overline{ab}$ y $\overline{bc}$ sean sus lados.

$\overline{ab}$ = 6,6 cm; $\overline{bc}$ = 5,3 cm.

d. Un romboide cuyos lados son $\overline{ab}$ y $\overline{ad}$.

$\overline{ab}$ = 5,8 cm; $\overline{ad}$ = 3,6 cm.

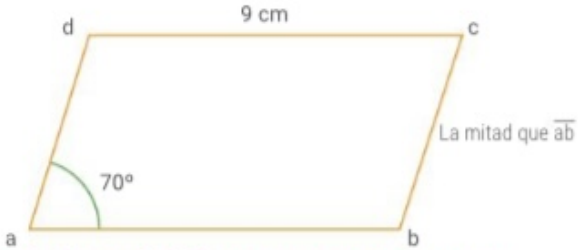
28. **Lean atentamente y resuelvan.** TracO

A cargo del alumno.

Diseñen una bandera como la de República Dominicana. Describan las características de su diseño para que un compañero la pueda representar idénticamente sin mirar el suyo.

29. **Calculen los lados y los ángulos interiores de los siguientes cuadriláteros, sin medir.**

a. Paralelogramo abcd.



$\overline{ab} = \overline{dc}$ = 9 cm; $\overline{ad} = \overline{bc}$ = 4,5 cm; a = c = 70°; b = d = 110°.

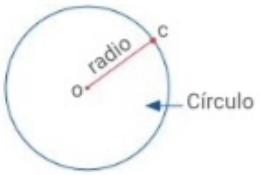
b. Trapecio isósceles abcd.

$\overline{ab}$ = 5 cm; $\overline{cd}$ = 7 cm; $\overline{ad} = \overline{bc}$ = 2 cm; c = d = 70°; a = b = 110°.

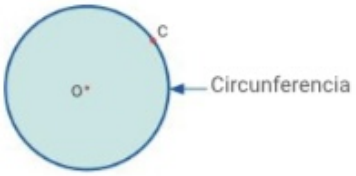
33. Circunferencia y círculo

▶ SABERES DINÁMICOS

Una **circunferencia** es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que se encuentran a la misma distancia de otro llamado **centro**.



Un **círculo** es el conjunto de todos los puntos de la circunferencia y todos los interiores a la misma.



Elementos de la circunferencia

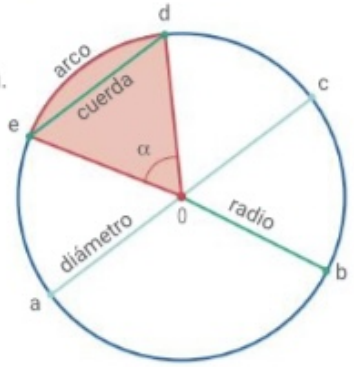
Radio: segmento que une el centro con uno de los puntos de la circunferencia.

Cuerda: segmento que une dos puntos de la circunferencia.

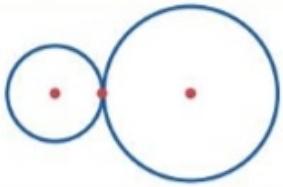
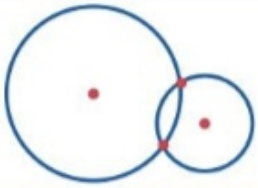
Diámetro: es la mayor de las cuerdas, contiene al centro y equivale a dos radios.

Arco: parte de la circunferencia comprendida entre dos puntos.

Ángulo central: su vértice es el centro de la circunferencia.



Posición relativa de dos circunferencias

Dos circunferencias son **tangentes** si se cortan en un único punto.	
Dos circunferencias son **secantes** si tienen dos puntos en común.	
Dos circunferencias son **concéntricas** si tienen el mismo centro.	

Áreas dinámicas [Matemática y la seguridad vial]

En las ciudades las tapas de las alcantarillas son redondas por una cuestión de seguridad.
Si fueran cuadradas, al ser la diagonal más larga que el lado, se podría meter la tapa por el agujero y caer adentro. Al ser circulares, es imposible que la tapa se caiga dentro.
La tapas cuadradas son utilizadas para tapar agujeros de apenas 40 cm de profundidad.

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. ¿Cómo se llama la cuerda más larga de la circunferencia? Se llama diámetro.
   b. El radio, ¿es una cuerda? No, el radio no es una cuerda porque no une dos puntos de la circunferencia.
   c. Expliquen cuál es la diferencia entre circunferencia y círculo.
   La circunferencia es el lugar geométrico de los puntos del plano que se encuentran a la misma distancia del centro, mientras que el círculo es el lugar geométrico de los puntos del plano que pertenecen a la circunferencia y de aquellos que son interiores a la misma.

ApAp

ACTIVIDADES

33. Circunferencia y círculo

30. Completen la oración para que sea correcta.

a. El arco es parte de la circunferencia.

b. El diámetro es el doble que el radio.

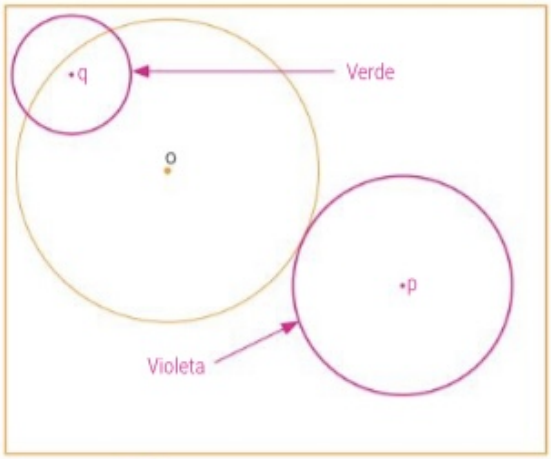
c. El radio va desde un punto de la circunferencia hasta el centro.

d. La cuerda más larga se denomina diámetro.

e. En la circunferencia se pueden marcar infinitas cuerdas.

f. El ángulo central tiene como vértice el centro de la circunferencia.

31. Observen la circunferencia dada y construyan lo pedido en cada caso.



a. Dibujen con violeta una circunferencia tangente a la dada.

b. Dibujen con verde una circunferencia secante a la dada.

c. Construyan todo el dibujo con el programa GeoGebra. Deben utilizar la opción "circunferencia" que se encuentra en la barra de tareas.

32. Lean atentamente y resuelvan.

Una puerta giratoria consta de tres hojas que giran dentro de un espacio circular. El diámetro interior de dicho espacio es de 2 metros (200 centímetros). Las tres hojas de la puerta dividen el espacio en tres sectores iguales. El siguiente plano muestra las hojas de la puerta en tres posiciones diferentes vistas desde arriba.

a. ¿Cuánto mide (en grados) el ángulo formado por dos hojas de la puerta?

360° : 3 = 120°

El ángulo mide 120°.

b. La puerta da 4 vueltas completas en un minuto. Hay espacio para dos personas en cada uno de los tres sectores. ¿Cuál es el número máximo de personas que pueden entrar en el edificio por la puerta en 30 minutos?

2 . 3 . 4 = 24 (1 minuto); 24 . 30 = 720 (30 minutos)

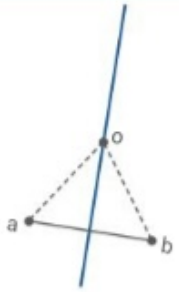
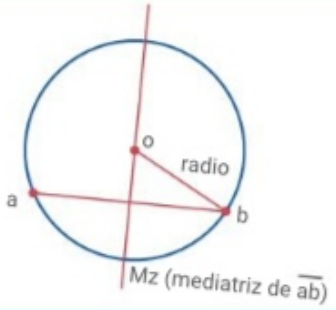
El número máximo de personas que pueden ingresar al edificio en media hora es de 720.

34. Construcción de circunferencias

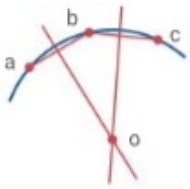
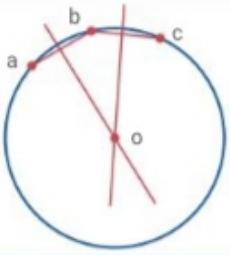
▶ SABERES DINÁMICOS

Se puede construir una circunferencia a partir de diferentes datos sin utilizar una regla graduada.

- **Dado el radio:** se toma la medida del radio con el compás, se pincha en el centro y se traza la circunferencia.
- **Dado el diámetro:** se encuentran el centro y el radio trazando la mediatriz del diámetro y luego se dibuja la circunferencia con el método anterior.
- **Dada una cuerda** se pueden seguir estos pasos.

1. Se traza la mediatriz de la cuerda y sobre ella se marca un punto cualquiera "o" (excepto que pertenezca a la cuerda), porque todos los puntos de la mediatriz equidistan de sus extremos.	2. Se traza la circunferencia de centro "o" que pase por los extremos de la cuerda. En este caso se pueden trazar infinitas cuerdas según el centro elegido.
	

- **Dado un arco de circunferencia** se pueden seguir estos pasos.

1. Se marcan tres puntos sobre el arco y se trazan las dos cuerdas que los unen. Se traza la mediatriz de cada una. El punto de intersección de las mediatrices (o) es el centro de la circunferencia.	2. Se pincha con el compás en "o" y se traza la circunferencia que pase por los puntos marcados sobre el arco.
	

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/ccc* para mirar un video acerca de cómo se construye una circunferencia dados 3 puntos no alineados.

* Enlace acortado de https://youtu.be/y87yq5E40k0

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. ¿Se puede construir una única circunferencia dados tres puntos no alineados? ¿Y dados dos puntos?
   b. Si se conoce el diámetro, ¿se puede construir una única circunferencia?
   c. ¿Por qué el centro debe equidistar de los extremos de una cuerda?

ApAp

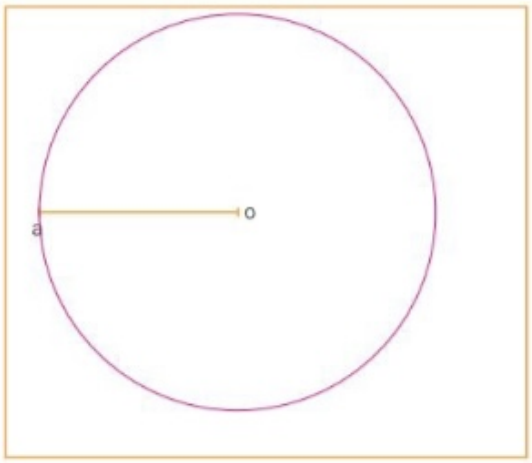
a. Sí, dados tres puntos no alineados se puede construir una única circunferencia. No, dados dos puntos existen infinitas circunferencias que pasan por ellos.
b. Sí.
c. Porque los extremos de una cuerda son puntos que pertenecen a la circunferencia y por ello la distancia de cada uno de los puntos hasta el centro debe ser la misma (radio).

ACTIVIDADES

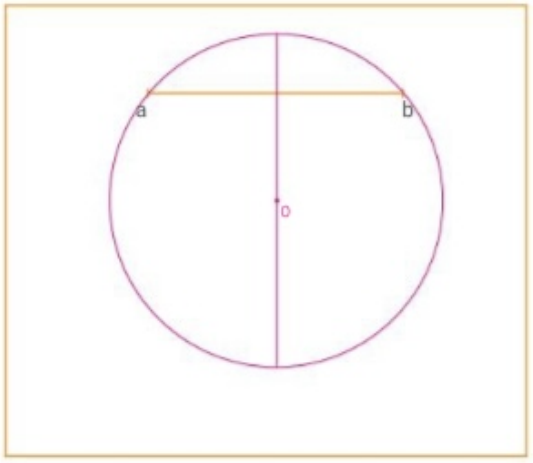
34. Construcción de circunferencias

33. Construyan una circunferencia que cumpla con las condiciones dadas en cada caso.

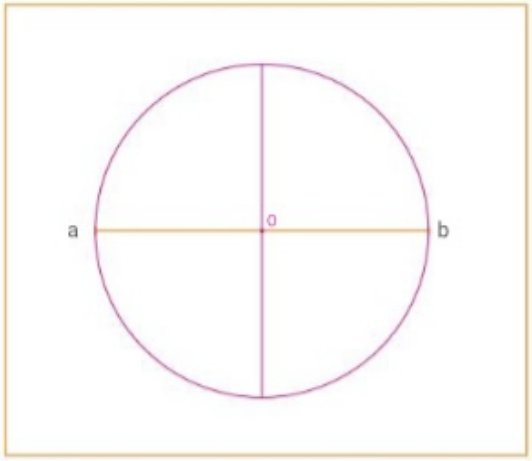
a. $\overline{oa}$ es el radio de la circunferencia.



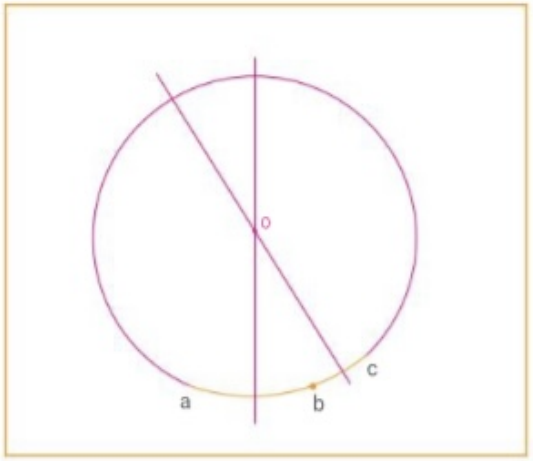
c. $\overline{ab}$ es una de las cuerdas de la circunferencia.



b. $\overline{ab}$ es el diámetro de la circunferencia.

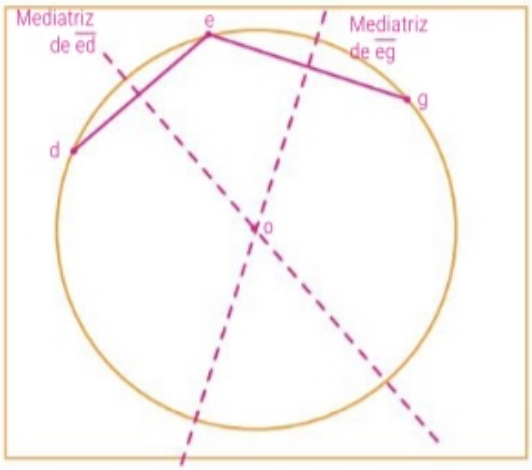


d. abc es arco de la circunferencia.



Comu

34. Determinen cuál es el centro de la siguiente circunferencia. Expliquen los pasos que realizaron.



Paso 1: se marcan los puntos d, e y g sobre la circunferencia.

Paso 2: se determinan dos cuerdas $\overline{ed}$ y $\overline{eg}$.

Paso 3: se trazan las mediatrices de las cuerdas anteriores.

Paso 4: se marca el punto intersección entre las mediatrices, ese es el centro de la circunferencia.

35. Polígonos

▶ SABERES DINÁMICOS

Se llama **polígono** a toda figura que tiene tres o más ángulos.

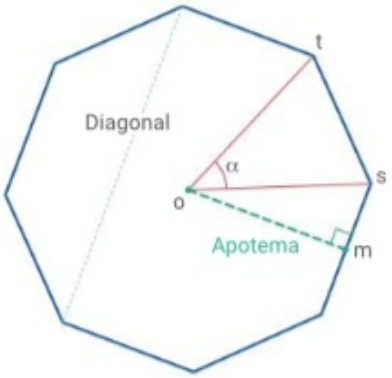
Clasificación de polígonos

- **Regulares:** todos sus lados y sus ángulos son iguales.
- **Irregulares:** no todos sus lados y sus ángulos son iguales.

• **Cóncavos:** al menos un ángulo interior es mayor a 180°.	• **Convexos:** todos los ángulos interiores son menores a 180°.

Elementos del polígono

Diagonal: es el segmento que tiene por extremos un vértice y otro no adyacente a él.
Apotema (Ap): es el segmento perpendicular al lado del polígono cuyos extremos son el punto medio del lado y el centro del polígono.
Ángulo central: es el ángulo cuyo vértice es el centro del polígono y sus lados pasan por dos vértices consecutivos.



La suma de los ángulos interiores de un polígono es: 180° . (n – 2), donde n es la cantidad de lados.

En un octógono (n = 8) la suma de los ángulos interiores es 180° . (8 – 2) = 1 080°

TEST DE COMPRENSIÓN

ApAp

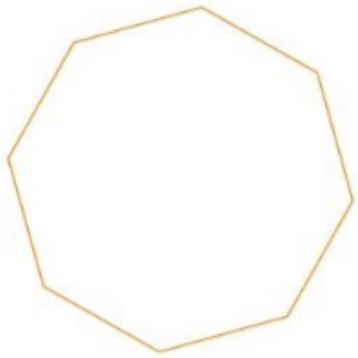
1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. ¿Existe un polígono regular que tenga un ángulo central de 72°? ¿Cuál? Sí, el pentágono.
   b. ¿Existe un polígono regular cuya suma de ángulos interiores es 1 200°? ¿Cuál? No, no existe.
   c. Escriban una fórmula que sirva para calcular la cantidad de diagonales que tiene un polígono en función de sus lados. La cantidad de diagonales de un polígono viene dada por: d = (n . (n – 3))/2, siendo n la cantidad de lados del polígono.

ACTIVIDADES

35. Polígonos

35. Observen atentamente los siguientes polígonos y resuelvan.
Clasifiquen los polígonos según sus lados y según sus ángulos. Luego, calculen la suma de los ángulos interiores de cada uno de los polígonos.

a.



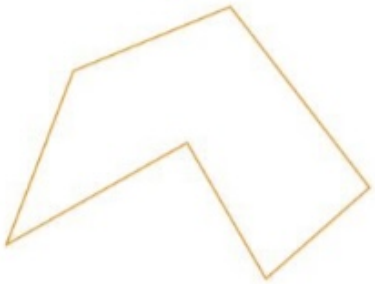
Octógono regular. Convexo.

$180° \cdot (n - 2) =$

$180° \cdot (8 - 2) = 180° \cdot 6 = 1\,080°$

Suma de los ángulos interiores: 1 080°.

b.



Hexágono. Cóncavo.

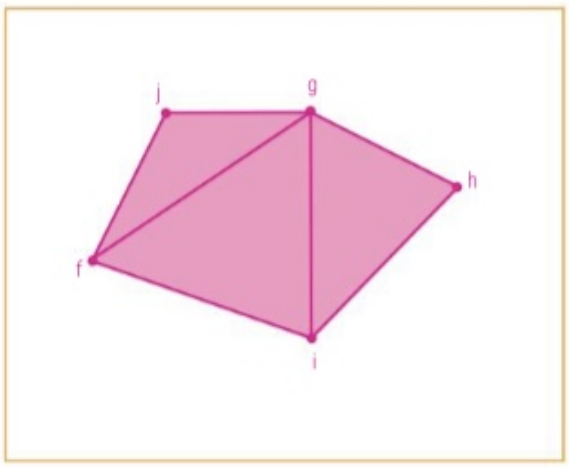
$180° \cdot (n - 2) =$

$180° \cdot (6 - 2) = 180° \cdot 4 = 720°$

Suma de los ángulos interiores: 720°.

36. Resuelvan.

a. Construyan un pentágono.



b. ¿Cuántas diagonales se pueden trazar desde uno de los vértices? Dibújenlas.

Se pueden trazar dos diagonales.

c. ¿En cuántos triángulos quedó dividido el polígono?

Quedó dividido en tres triángulos.

d. ¿Cómo se puede calcular la suma de los ángulos interiores del pentágono sin utilizar la fórmula? Expliquen la respuesta.

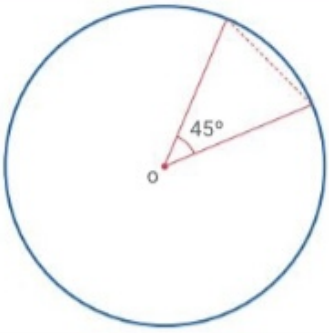
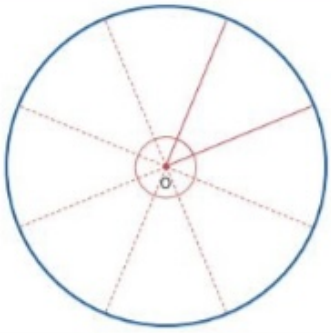
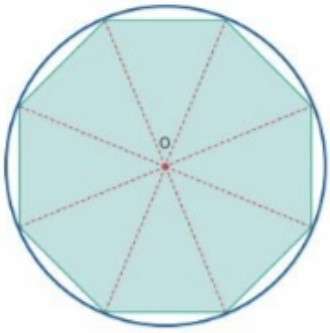
Se puede calcular realizando la suma de los ángulos interiores de cada uno de los triángulos, es decir, $3 \cdot 180° = 540°$.

36. Construcción de polígonos regulares

▶ SABERES DINÁMICOS

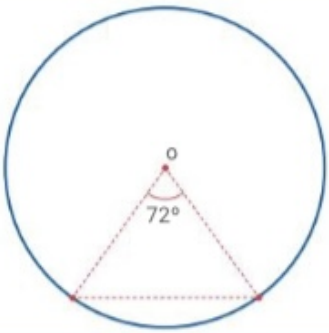
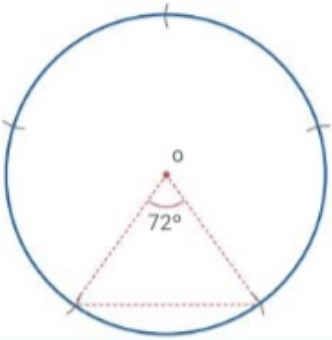
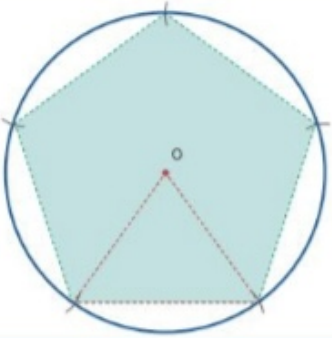
Para **construir un polígono regular con regla, compás y transportador**, se pueden seguir estos pasos.

Por ejemplo, para construir un octógono regular, se puede realizar la siguiente construcción.

1. Se dibuja una circunferencia y un radio. Se calcula el valor del ángulo central del polígono haciendo 360° : 8 = 45°.	2. A partir del radio de la circunferencia y tomando como vértice el centro, se dibujan ocho ángulos consecutivos de 45°.	3. Los puntos en donde se cortan los lados de los ángulos con circunferencia son los vértices del octógono.
		

Para **construir un polígono regular a partir de un triángulo isósceles**, se debe cumplir que el cociente entre 360° y la medida del ángulo desigual del triángulo sea un número entero.

Por ejemplo, dado un triángulo isósceles con el ángulo desigual de 72°, se puede realizar la siguiente construcción.

1. Se traza la circunferencia tomando como centro el vértice del ángulo desigual y como radio, uno de los lados iguales.	2. Se toma con compás la medida del lado desigual del triángulo y se marca sucesivamente en la circunferencia comenzando en uno de los vértices del triángulo que interseca a la circunferencia.	3. Se determinan los segmentos que son los lados del polígono regular. El polígono obtenido en este caso es un pentágono.
		

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. El radio de la circunferencia ¿debe tener la misma longitud que el lado del polígono regular?
   b. La amplitud del ángulo central de un polígono regular, ¿debe ser un número entero?
   c. Analicen qué polígono regular se puede construir a partir de un triángulo equilátero.

ApAp

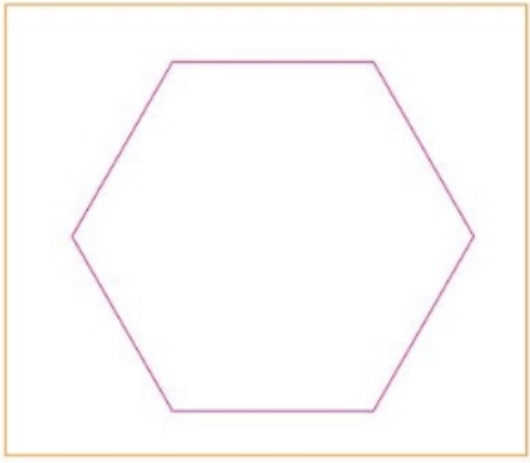
a. No es necesario.
b. No, por ejemplo, en un polígono regular de 16 lados, el ángulo central tiene una amplitud de 22° 30′ (360° : 16 = 22,5°).
c. El hexágono.

ACTIVIDADES

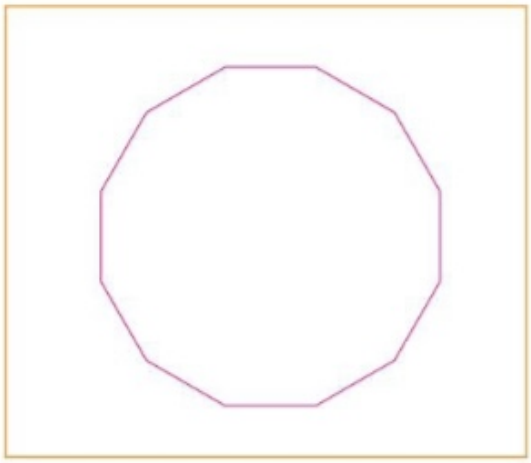
36. Construcción de polígonos regulares

37. Construyan los polígonos regulares indicados en cada caso.

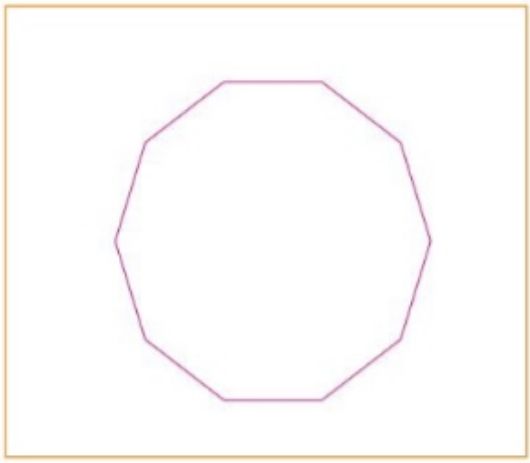
a. Hexágono



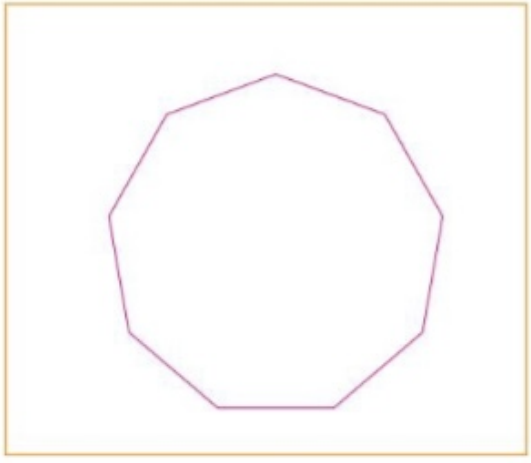
c. Dodecágono



b. Decágono



d. Eneágono

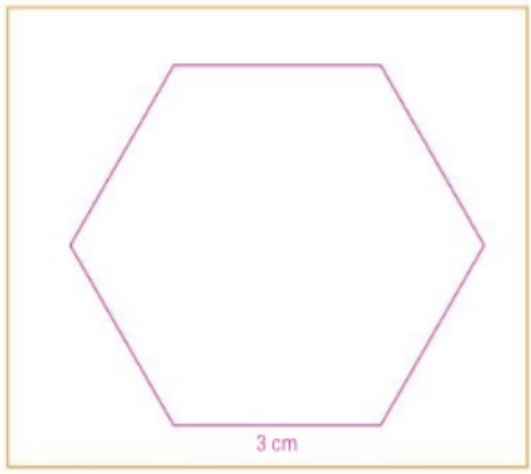


38. Respondan.

a. Para construir un hexágono regular de 3 cm de lado, ¿es suficiente saber la medida del lado únicamente? Expliquen la respuesta.

Para construir un hexágono regular es suficiente con conocer la medida del lado, ya que coincide con el radio de la circunferencia.

b. Construyan un hexágono regular de 3 cm de lado.

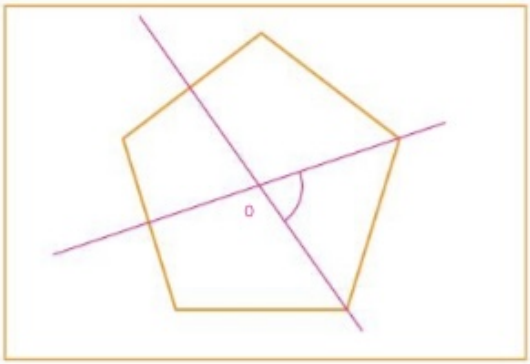


36. Construcción de polígonos regulares

39. Tracen un ángulo central en cada polígono. Expliquen cómo lo resolvieron.

Para poder trazar el ángulo central, primero se debe determinar el centro de la circunferencia en el cual esta inscripto el polígono regular, para ello se debe trazar la mediatriz de dos de los lados y el punto donde se intersecan es el centro de la circunferencia. Luego, se traza el ángulo cuyo vértice es el centro hallado y sus lados pasan por dos vértices consecutivos del polígono.

a. Pentágono regular.



b. Octógono regular.

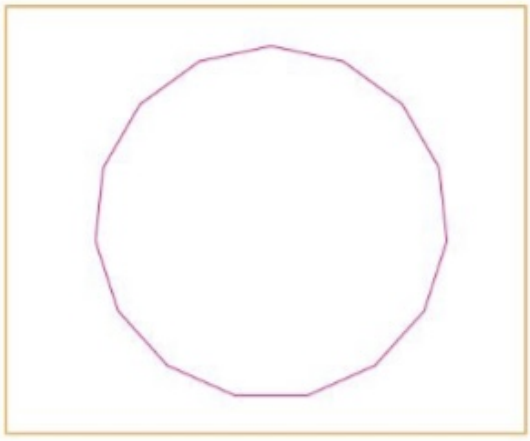
40. Lean atentamente y respondan. Expliquen la respuesta.

a. Para construir un pentadecágono (polígono de 15 lados) regular ¿se puede comenzar construyendo un ángulo central de 20°?

360° : 15 = 24°

No, el ángulo central debe ser de 24°.

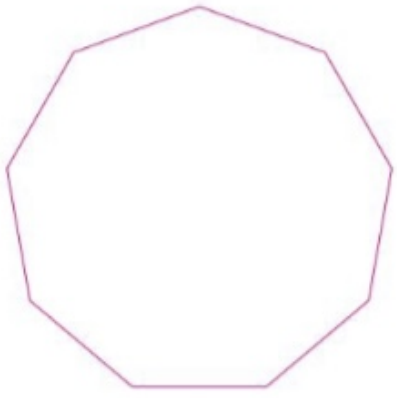
b. Construyan un pentadecágono.



41. Dibujen un polígono regular con la condición indicada en cada caso, cuando sea posible.

a. La suma de los ángulos interiores es de 1 260°.

Es posible, se trata de un eneágono. 180° . (n − 2) = 1 260°, es decir, n = 9.



b. La suma de los ángulos interiores es de 530°.

No es posible, porque la suma de los ángulos interiores debe ser múltiplo de 180°.

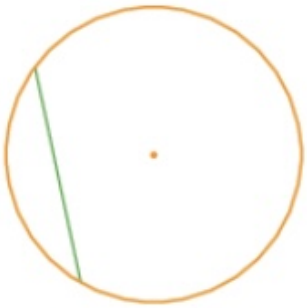
36. Construcción de polígonos regulares

Comu

42. **Construyan los polígonos regulares con los datos dados en cada caso, cuando sea posible. Escriban los pasos que siguieron para la construcción y el nombre del polígono construido.**

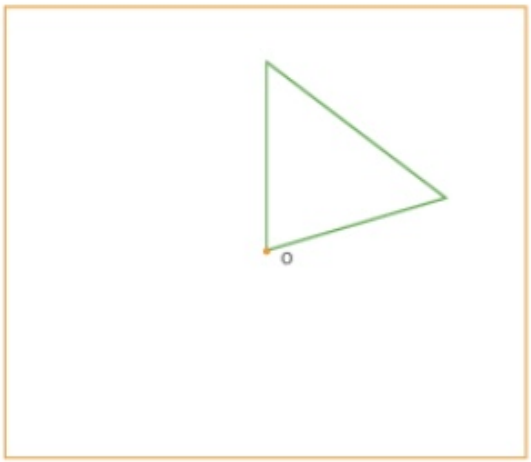
a. Circunferencia circunscripta y un lado del polígono.

Construcciones a cargo del alumno.



Se toma con compás la medida del lado del polígono y se marca sucesivamente en la circunferencia comenzando en uno de los vértices del polígono.

c. Triángulo isósceles.

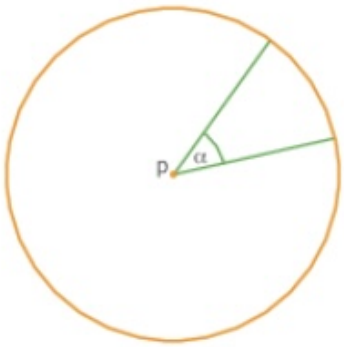


Se traza la circunferencia tomando como centro el vértice opuesto al ángulo desigual y como radio, uno de los lados iguales, luego se continua como en los ítems a. y b.

b. Arco de la circunferencia circunscripta. Los extremos son vértices de lados consecutivos.

Se toma un punto más (en el arco) y se busca el centro de la circunferencia trazando las mediatrices de cada uno de los dos segmentos, se traza el ángulo central y se continua como en el ítem a.

d. Circunferencia circunscripta y ángulo central.



Se toma con compás la medida del lado del polígono y se marca sucesivamente en la circunferencia comenzando en uno de los vértices del polígono, se determinan los segmentos que son los lados del polígono regular y se los une para formar el polígono.

Integración final

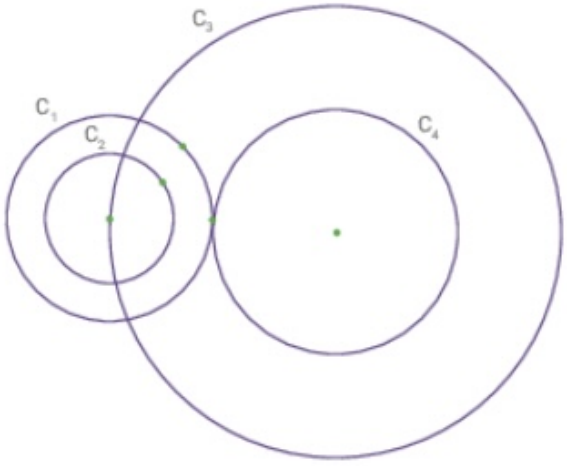
43. Construyan dos circunferencias con las condiciones pedidas en cada caso.

a. Una de 3 cm de radio y la otra de 8 cm de diámetro que sean tangentes entre sí.
A cargo del alumno.

b. Dos circunferencias de 3 cm de radio cada una y que sean secantes entre sí.
A cargo del alumno.

c. Una circunferencia de 10 cm de diámetro y la otra de 4 cm de radio, de manera que la distancia entre los centros sea de 9 cm. ¿Cómo se clasifican estas circunferencias según su posición?
Construcción a cargo del alumno. Se clasifican como tangentes.

44. Observen el dibujo y completen con la clasificación correspondiente.



a. C_1 y C_2 son concéntricas.

b. C_2 y C_3 son secantes.

c. C_1 y C_3 son secantes.

d. C_1 y C_4 son tangentes.

45. Construyan una circunferencia y luego completen con lo pedido. A cargo del alumno.

a. Radio y diámetro.

b. Ángulo central de 55°.

c. Ángulo central de 200°.

d. Marquen el arco que corresponde a cada ángulo dibujado.

46. Planteen y resuelvan.

a.

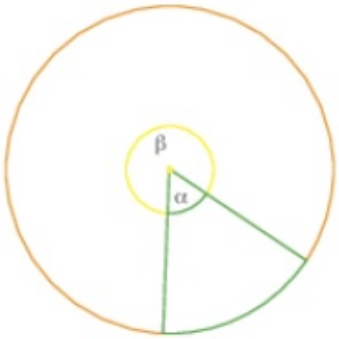
Datos:

$\hat{\alpha} = 2x - 26°$

$\hat{\beta} = 7x - 37°$

$\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 360°$

$2x - 26° + 7x - 37° = 360°$



$x =$ 47° $\quad \hat{\alpha} =$ 68° $\quad \hat{\beta} =$ 292°

b.

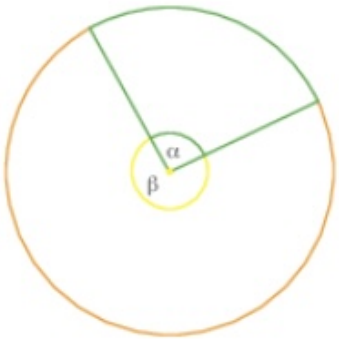
Datos:

$\hat{\alpha} = 3x + 20°$

$\hat{\beta} = 6x + 70°$

$\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 360°$

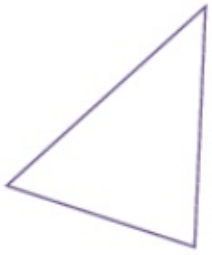
$3x + 20° + 6x + 70° = 360°$



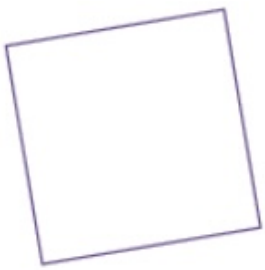
$x =$ 30° $\quad \hat{\alpha} =$ 110° $\quad \hat{\beta} =$ 250°

47. Construyan una circunferencia que pase por los vértices de las siguientes figuras.
A cargo del alumno.

a.



b.



48. **Construyan circunferencias que cumplan con las condiciones dadas.** A cargo del alumno.

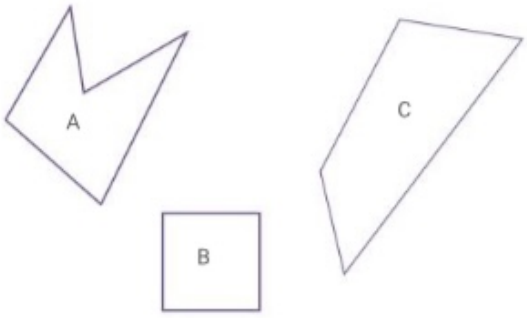
a. Que su radio $\overline{oa}$ sea de 4,5 cm.

b. Que su diámetro sea de 6,2 cm.

c. Dada una cuerda $\overline{ab}$ que no sea diámetro.

d. Dados 3 puntos a, b y c que formen un arco de la circunferencia.

49. **Observen las figuras y completen con la o las letras que correspondan.**



Regular: B

Irregular: A y C

Convexo: B y C

Cóncavo: A

50. **Respondan.**

a. ¿Cuántas diagonales se pueden trazar desde un vértice de un polígono de 20 lados?
Desde un vértice se pueden trazar 17 diagonales.

b. ¿En cuántos triángulos queda dividido?
Queda dividido en 18 triángulos.

c. ¿Cuál es la suma de los ángulos interiores de ese polígono?
La suma de los ángulos interiores del polígono es 3 240°.

51. **Marquen con una X las medidas que pueden ser la suma de los ángulos interiores de un polígono. Expliquen las respuestas.**

a. 520°. ☐

b. 1 440°. X

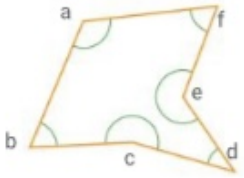
c. 45°. ☐

d. 620°. ☐

e. 54°. ☐

52. **Calculen el valor de "x" y de los ángulos pedidos.**

a.



Datos:

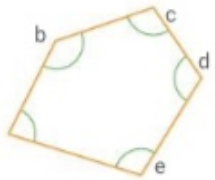
$\hat{a} = 3x + 28°$ $\hat{d} = x - 3°$

$\hat{b} = 2x + 46°$ $\hat{e} = 8x + 73°$

$\hat{c} = 8x - 15°$ $\hat{f} = 41°$

$x =$	25°	$\hat{b} =$	96°	$\hat{d} =$	22°
$\hat{a} =$	103°	$\hat{c} =$	185°	$\hat{e} =$	273°

b.



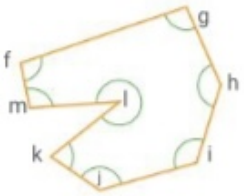
Datos:

$\hat{a} = 4x + 60°$ $\hat{c} = 22x - 5°$ $\hat{e} = 6x + 78°$

$\hat{b} = 12x + 75°$ $\hat{d} = 25x - 13°$

$x =$	5°	$\hat{b} =$	135°	$\hat{d} =$	112°
$\hat{a} =$	80°	$\hat{c} =$	105°	$\hat{e} =$	108°

c.



Datos:

$\hat{f} = 8x + 9°$ $\hat{i} = 12x - 19°$ $\hat{l} = 30x - 42°$

$\hat{g} = 5x + 23°$ $\hat{j} = 7x + 32°$ $\hat{m} = 4x + 45°$

$\hat{h} = 15x - 30°$ $\hat{k} = 90°$

$x =$	12°	$\hat{h} =$	150°	$\hat{k} =$	90°
$\hat{f} =$	105°	$\hat{i} =$	125°	$\hat{l} =$	318°
$\hat{g} =$	83°	$\hat{j} =$	116°	$\hat{m} =$	93°

7 Perímetro, área y volumen

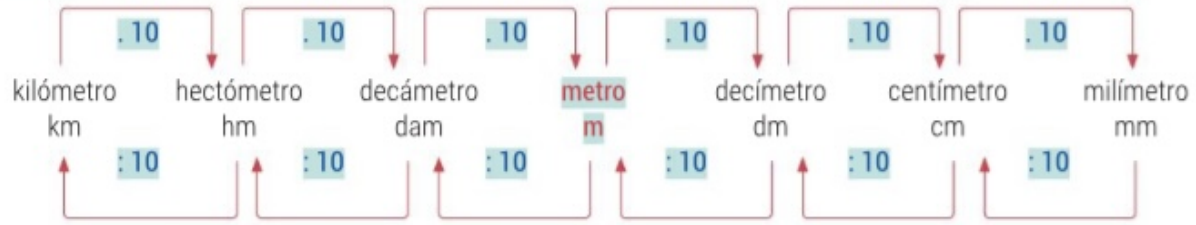
37. Perímetro y área de figuras planas

▶ SABERES DINÁMICOS

Medir una longitud es compararla con otra cantidad determinada como unidad de medida. Se debe calcular cuántas veces está contenida la unidad elegida en esa longitud.

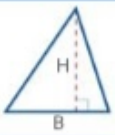
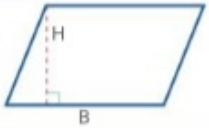
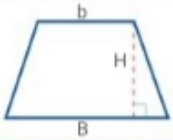
Actualmente se usa el **sistema métrico decimal.**

La unidad de longitud más importante es el metro (m).



Perímetro y área

El **perímetro** de una figura es igual a la suma de la medida de todos los lados.
El **área** es la cantidad de superficie que ocupa una figura.

Figura		Fórmula del área
Triángulo		Área = $\frac{B \cdot H}{2}$
Cuadrado		Área = L^2
Rectángulo		Área = B . H
Paralelogramo		Área = B . H
Trapecio		Área = $\frac{(B + b) \cdot H}{2}$

Dinámica TConecta

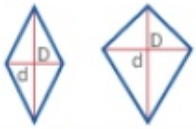
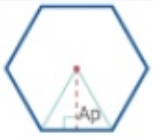
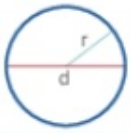
Ingresen en puerto.pub/periar * para conocer más acerca del significado de perímetro y de área.

*Enlace acortado de https://www.youtube.com/watch?v=wYNvY_bOGdc

TIP

Para sumar las medidas de los lados de una figura, todas deben estar expresadas en la misma unidad.

37. Perímetro y área de figuras planas

Figura		Fórmula del área
Rombo y romboide		$\text{Área} = \frac{D \cdot d}{2}$
Polígono regular		$\text{Área} = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2}$
Círculo		$\text{Área} = \pi \cdot r^2$ $\text{Perímetro} = \pi \cdot d$

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. ¿A cuántos metros equivale 1 kilómetro? Un kilómetro equivale a 1 000 metros.
   b. Si el lado de un cuadrado mide 5 cm, ¿cuál es su perímetro? Su perímetro es 20 cm.
   c. Si el lado de un cuadrado mide 5 cm, ¿cuál es su área? Su área es 25 cm^2.
   d. Confeccionen una tabla que incluya las fórmulas del perímetro y del área de cada tipo de figura.
   A cargo del alumno.

ACTIVIDADES

37. Perímetro y área

1. Completen, expresando la misma medida en distintas unidades.

km	m	cm	mm
0,003152	3,152	315,2	3152
0,00178	1,78	178	1780
1,5	1500	150000	1500000
0,204	204	20400	204000

2. Ordenen de menor a mayor:

45,5 m; 45,6 dam; 4550 mm; 45,6 dm

4550 mm < 45,6 dm < 45,5 m < 45,6 dam

3. Lean atentamente y respondan.

En un juego, Guadalupe y Julieta dieron 200 pasos. Si Guadalupe hizo todos sus pasos de 50 cm y Julieta, todos sus pasos de 0,055 dam, ¿cuántos metros recorrió cada una?

50 cm = 0,5 m 0,5 . 200 = 100 Guadalupe recorrió 100 m.

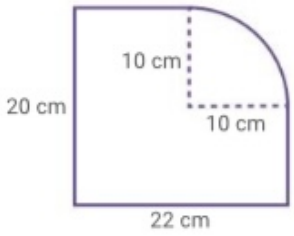
0,055 dam = 0,55 m 0,55 . 200 = 110 Julieta recorrió 110 m.

ACTIVIDADES

37. Perímetro y área

4. Calculen el perímetro de las siguientes figuras.

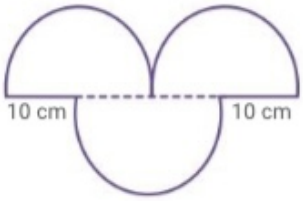
a.



20 + 22 + 12 + 10 + 3,14 . 20 : 4 = 64 + 15,7 = 79,7

Perímetro: 79,7 cm

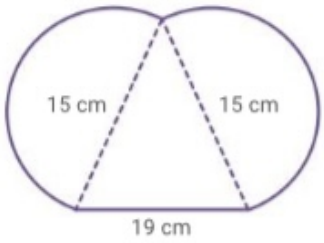
b.



10 + 10 + 3,14 . 20 : 2 . 3 = 20 + 31,4 . 3 = 20 + 94,2 = 114,2

Perímetro: 114,2 cm

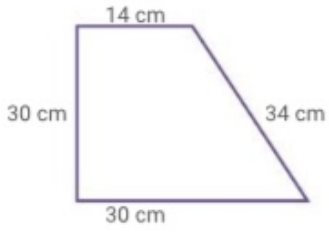
c.



15 . 3,14 + 19 = 47,1 + 19 = 66,1

Perímetro: 66,1 cm

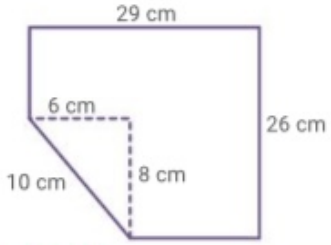
d.



30 + 30 + 34 + 14 = 108

Perímetro: 108 cm

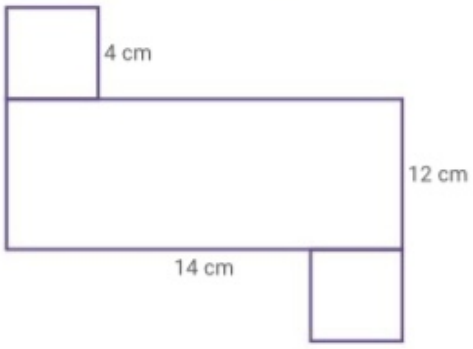
e.



10 + 23 + 26 + 29 + 18 = 106

Perímetro: 106 cm

f.



4 + 4 + 4 + 12 + 14 + 4 + 4 + 4 + 12 + 14 = 76

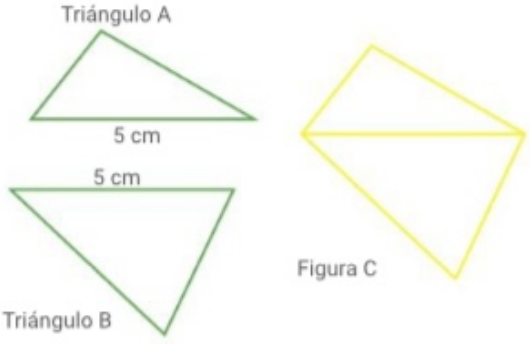
Perímetro: 76 cm

DinámicaMente

El perímetro del triángulo A es de 12 cm; el perímetro del triángulo B es de 17 cm y la figura C está formada por la unión de los triángulos, como se indica el dibujo.
¿Cuál es el perímetro de la figura C?

12 − 5 + 17 − 5 = 19

El perímetro de la figura C es 19 cm.



ACTIVIDADES

37. Perímetro y área

Comu

5. Expliquen cuál es la diferencia entre círculo y circunferencia. Comparen sus explicaciones.

El círculo es el área de la región del plano limitada por la circunferencia, en tanto que, la circunferencia es la curva cerrada formada por los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro, que es interior a la circunferencia.

6. Lean atentamente y respondan. Expliquen la respuesta.

Laura tiene una copa con las siguientes medidas: el radio de la circunferencia superior de la copa es de 3 cm y la altura de la copa es de 18,5 cm. ¿Qué es mayor: la altura de la copa o el perímetro de la circunferencia superior?

3 . 2 . 3,14 = 18,84

Es mayor el perímetro de la circunferencia superior, ya que mide 18,84 cm, mientras que la altura mide 18,5 cm.

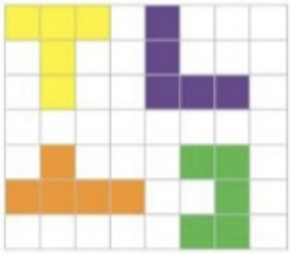
7. Dibujen dos figuras distintas cuyo perímetro sea de 10 cm y, luego, calculen el área de cada una.

A cargo del alumno.

8. Observen y respondan.

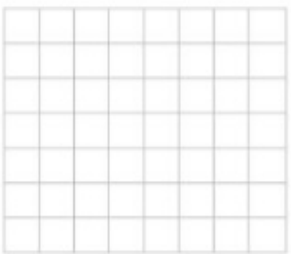
Se llama *pentáminos* a las figuras que se pueden formar con 5 cuadraditos (deben unirse coincidiendo al menos uno de sus lados).

a. Hallen el perímetro y el área de cada *pentámino* (cada cuadradito tiene un área de 1 cm^2).



Pentámino	Perímetro	Área
Amarillo	12 cm	5 cm^2
Violeta	12 cm	5 cm^2
Naranja	12 cm	5 cm^2
Verde	12 cm	5 cm^2

b. Dibujen otras tres figuras *pentáminos* e indiquen cuál es el perímetro y el área de cada una.



A cargo del alumno.

37. Perímetro y área

9. Tomen como referencia 1 m² y, sin realizar ninguna otra medida, resuelvan.

a. Estimen el área de los siguientes objetos y clasifíquenlos en la tabla.

- La puerta del aula.
- El pizarrón.
- El escritorio del docente.
- La carpeta o cuaderno de clase.
- La ventana del aula.

Área menor que $\frac{1}{2}$ m²	Área entre $\frac{1}{2}$ m² y 1 m²	Área mayor que 1 m²
Carpeta o cuaderno de clase	Ventana del aula	Pizarrón
	Escritorio del docente	Puerta del aula

b. Agreguen cuatro objetos a la tabla para que queden completos todos los casilleros. A cargo del alumno.

10. Resuelvan.

a. Calculen el área de las figuras dibujadas y anoten los resultados en la tabla.

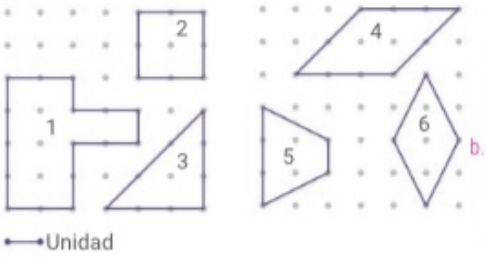


Figura	1	2	3	4	5	6
Área	10	4	4,5	6	4	4

b.

Figura	Verificación fórmula de Pick
1	10 = 3 + 16/2 − 1
2	4 = 1 + 8/2 − 1
3	4,5 = 1 + 9/2 − 1

Figura	Verificación fórmula de Pick
4	6 = 2 + 10/2 − 1
5	4 = 2 + 6/2 − 1
6	4 = 3 + 4/2 − 1

b. El teorema de Pick es una fórmula que relaciona el área de un polígono cuyos vértices tienen coordenadas enteras con el número de puntos en su interior, y en su borde que tengan también coordenadas enteras. Verifiquen los resultados de la tabla anterior usando la fórmula de Pick: $A = I + \frac{C}{2} - 1$, donde

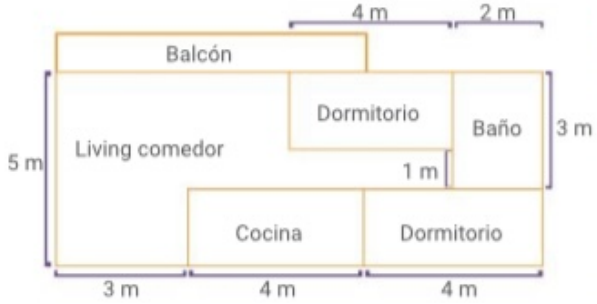
A = área del polígono.

I = número de puntos del cuadriculado que son interiores al polígono.

C = número de puntos del cuadriculado que pertenecen al contorno del polígono.

11. Observen y respondan.

Si 1 m² de porcelanato cuesta $900, ¿cuánto dinero se necesita para la colocación del piso de este departamento, sin incluir el balcón? (Sin incluir la mano de obra ni otros materiales).



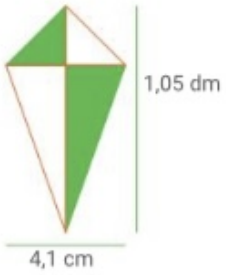
5 . 11 . 900 = 55 . 900 = 49 500

Para la colocación del piso se necesitarán $49 500.

37. Perímetro y área

12. Calculen el área sombreada de las siguientes figuras, en cm^2.

a.



1,05 dm = 10,5 cm (10,5 . 4,1) : 2 : 2 = 10,76

Área: 10,76 cm^2

d.

165 mm = 16,5 cm; 0,48 dm = 4,8 cm

(16,5 . 18,5) : 2 − 3,14 . $4,8^2$ = 152,63 − 72,35 = 80,28

Área: 80,28 cm^2

b.

95 mm = 9,5 cm $9,5^2$ − 3,14 . $4,75^2$ = 90,25 − 70,85 = 19,4

Área: 19,4 cm^2

e.

(3,8 . 1,11 : 2) . 2 = 4,22

Área: 4,22 cm^2

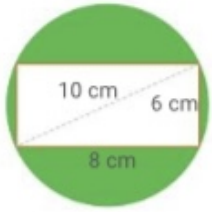
c.

2,3 dm = 23 cm; 147 mm = 14,7 cm

(22 + 14,7) : 2 . 35 − (14,7 . 23) : 2 = 642,25 − 169,05 = 473,2

Área: 473,2 cm^2

f.



3,14 . 5^2 − 6 . 8 = 78,5 − 48 = 30,5

Área: 30,5 cm^2

TracO
CyRes

13. Reúnanse en grupos y realicen la siguiente actividad en sus carpetas. A cargo de los alumnos.

a. Seleccionen un desperdicio entre los siguientes:

- Una lata de gaseosa.
- Un plato descartable.
- Una cajita de jugo.

b. Midan sus dimensiones.

c. Determinen las dimensiones de un lugar de la escuela (aula, patio, etc.).

d. Estimen qué cantidad del objeto elegido es necesaria para cubrir ese lugar.

e. Investiguen qué cantidad del objeto elegido es desechado por día en la Argentina. Luego, busquen alguna relación con la cantidad estimada en el ítem anterior y escriban una reflexión.

38. Área lateral y total de cuerpos

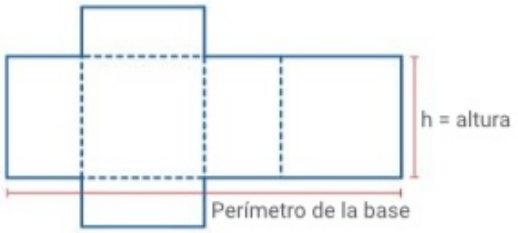
▶ SABERES DINÁMICOS

El **área lateral** de un poliedro es la suma de las áreas de todas las caras laterales.
El **área total** de un poliedro es la suma de las áreas de todas sus caras.

Para calcular el área de un cuerpo, se puede dibujar primero su desarrollo en el plano.

Área del prisma

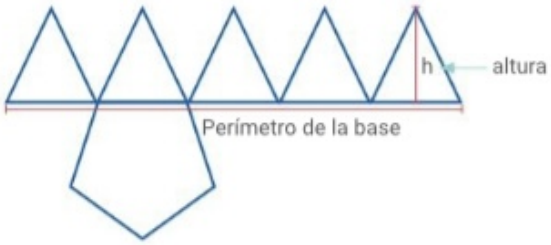
Área lateral = perímetro de la base . h
Área total = área lateral + 2 . área de la base



Área de la pirámide

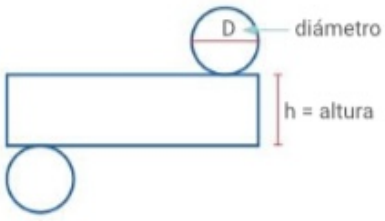
$$\text{Área lateral} = \frac{\text{perímetro de la base} \cdot h}{2}$$

Área total = área lateral + área de la base



Área del cilindro

Área lateral = π . D . h
Área total = D . h . π + 2π . r^2



Áreas dinámicas [Matemática y Ciencias Sociales]

La gran pirámide de Giza (también llamada pirámide de Keops) es la más grande de las pirámides de Egipto. Según el historiador Heródoto, se construyó de modo que el área de una cara sea igual a la de un cuadrado cuyo lado es la altura de la pirámide.

TEST DE COMPRENSIÓN

ApAp

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. Un prisma ¿puede tener base triangular? Sí, un prisma puede tener base triangular.
   b. ¿Cómo se calcula el área total de un prisma de base hexagonal? Se calcula como: Perímetro de la base . h + 2 . área de la base
   c. Escriban la fórmula del área total del cilindro usando el diámetro en lugar del radio.
   El área total del cilindro usando el diámetro es:
   Área total = π . D . h + 2 . π . $D^2/4$
   Simplificando quedaría: π . D . h + π . $D^2/2$

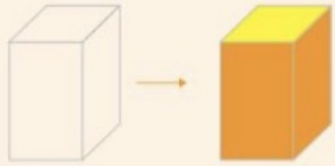
ACTIVIDADES

38. Área lateral y total de cuerpos

Trac0

14. Resuelvan con un compañero.
Se quiere pintar algunos cuerpos de la siguiente manera: las caras, con color naranja y las bases, con amarillo.

a. En un prisma de base cuadrada,...



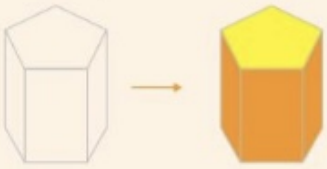
- Si la medida de la arista de la base es 12 cm, ¿cuántos cm^2 del prisma se pintan de amarillo?

$12^2 \cdot 2 = 288$ Se pintan de amarillo 288 cm^2 del prisma (sus bases).

- Si además se sabe que la altura es de 20 cm, ¿cuántos cm^2 del prisma se pintan de naranja?

$20 \cdot 12 \cdot 4 = 960$ Se pintan de naranja 960 cm^2 del prisma (sus caras laterales).

b. En un prisma de base pentagonal,...



- Si la arista de la base es 15 cm; el apotema, 10 cm y la altura, 20 cm, ¿cuántos cm^2 de cada color se pintan?

750 cm^2 de amarillo ($15 \cdot 5 \cdot 10 : 2 \cdot 2 = 750$) y 1 500 cm^2 de naranja ($15 \cdot 20 \cdot 5 = 1\,500$).

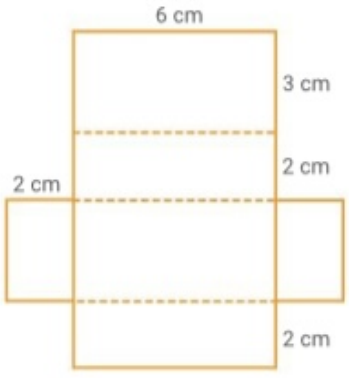
c. En una pirámide de base cuadrada,...

- Si la medida de la altura de la pirámide es de 12 cm y el perímetro de la base es 40 cm, ¿cuántos cm^2 de la pirámide se pintan de amarillo? ¿Y de naranja?

100 cm^2 de amarillo ($10^2 = 100$) y 260 cm^2 de naranja ($10 \cdot 13 : 2 \cdot 4 = 260$).

15. Indiquen qué cuerpo se puede formar en cada caso. Luego, calculen el área lateral y el área total de cada uno.

a.

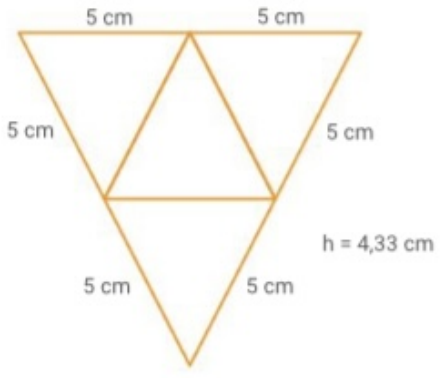


Nombre del cuerpo: Prisma de base rectangular.

Área lateral: 60 cm^2 [$6 \cdot (3 + 2 + 3 + 2) = 60$]

Área total: 72 cm^2 [$60 + 2 \cdot 3 \cdot 2 = 72$]

b.



Nombre del cuerpo: Pirámide de base triangular.

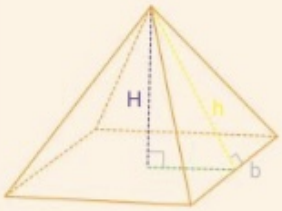
Área lateral: 32,48 cm^2 [$5 \cdot 4,33 : 2 \cdot 3 = 32,48$]

Área total: 43,3 cm^2 [$5 \cdot 4,33 : 2 + 32,48$]

38. Área lateral y total de cuerpos

TracO

16. **Lean atentamente y resuelvan con un compañero.**



La relación que se explica en la plaqueta **"Áreas dinámicas" de la página 131** se puede representar con la fórmula:

$$\frac{b \cdot h}{2} = H^2$$

a. ¿Qué relación tiene el segmento verde con la arista de la base de la pirámide?

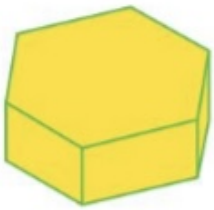
El segmento verde es la mitad de la arista de la base de la pirámide.

b. Completen la tabla con el dato de la dimensión que falta en cada pirámide de base cuadrada. Luego, indiquen si se cumple la misma relación que en la gran pirámide de Giza.

Arista de la base	Altura de la cara	Altura de la pirámide	¿Cumple la relación?
10 m	8,09 m	6,36 m	Sí
11,99 m	11,66 m	10 m	No
15 m	12,13 m	9,54 m	No

17. **Respondan.**

Para una fiesta de 15 años, se contrató un conjunto que actuará sobre una tarima hexagonal de 5 m de lado, apotema de 4,35 m y 40 cm de alto. ¿Cuántos m^2 de madera se necesitan para construir la tarima? Tengan en cuenta que la base que va al piso no lleva madera.



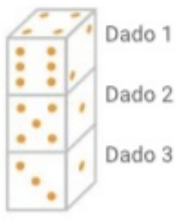
40 cm = 0,4 m 5 . 4,35 : 2 . 6 + 5 . 0,4 . 6 = 65,25 + 12 = 77,25

Para construir la tarima, sin tener en cuenta la base del piso, se necesitan 77,25 m^2.

18. **Lean atentamente y respondan.**

Los dados son cubos con un sistema especial de numeración en los que se aplica la siguiente regla: el número total de puntos en dos caras opuestas es siempre siete.

Se puede observar en el dibujo tres dados colocados uno encima del otro. El dado 1 tiene cuatro puntos en la cara de arriba. ¿Cuántos puntos hay en total en las cinco caras horizontales que no se pueden ver (cara de abajo del dado 1, caras de arriba y debajo de los dados 2 y 3)?



Cara de abajo del dado 1: 7 − 4 = 3; caras del dado 2: 7; caras del dado 3: 7.

3 + 7 + 7 = 17

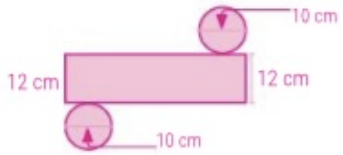
En las cinco caras horizontales que no se pueden ver hay en total 17 puntos.

38. Área lateral y total de cuerpos

19. Resuelvan.

Una lata cilíndrica de gaseosa tiene 10 cm de diámetro y 12 cm de altura.

a. Dibujen el desarrollo de la lata indicando las dimensiones de las figuras que lo forman en su totalidad.



b. Calculen la cantidad de cm^2 de lata que se necesitan para armar el cuerpo cilíndrico.

$3{,}14 \cdot 5^2 \cdot 2 + 12 \cdot 3{,}14 \cdot 10 = 157 + 376{,}8 = 533{,}8$

Se necesitan 533,8 cm^2 de lata.

c. ¿Cuántos cm^2 se necesitan para armar una docena de latas?

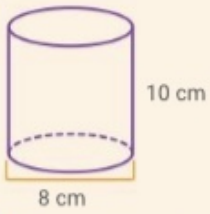
$12 \cdot 533{,}8 = 6\,405{,}6$

Para una docena de latas se necesitan 6 405,6 cm^2.

TracO

20. Reúnanse en grupos y resuelvan.

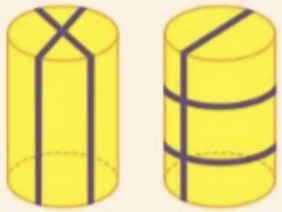
a. En una fábrica se debe calcular el costo de fabricación de latas de tomates con las dimensiones del dibujo. ¿Cuál es el área de hojalata requerida para la fabricación de las latas?



$3{,}14 \cdot 4^2 \cdot 2 + 10 \cdot 3{,}14 \cdot 8 = 100{,}48 + 251{,}2 = 351{,}68$

El área de hojalata requerida es 351,68 cm^2.

b. Dos paquetes cilíndricos de igual tamaño se atan de dos formas diferentes como indican los dibujos. En el primer paquete la cinta pasa por los centros de las bases. En el segundo también pasan por los centros de las bases y cada vuelta de la cinta en la parte lateral es paralela a la base. El radio de la base mide 15 cm y la altura, 40 cm. ¿En qué caso se utiliza menos cinta para atar el paquete sin tener en cuenta el desperdicio en los nudos? Expliquen cómo lo hicieron.



En el primer caso se utilizan 280 cm y en el segundo 328,4 cm, es decir, se utiliza menos cinta en el primer caso.

Primer caso: $4 \cdot 30\text{ cm} + 4 \cdot 40\text{ cm} = 280\text{ cm}$ (4 diámetros + 4 alturas)

Segundo caso: $2 \cdot 30\text{ cm} + 2 \cdot 40\text{ cm} + 2 \cdot 3{,}14 \cdot 15\text{ cm} \cdot 2 = 328{,}4\text{ cm}$ (2 diámetros + 2 alturas + 2 perímetros de las bases).

DinámicaMente

Un envase de galletitas redondas tiene un área total de $28 \cdot \pi\ cm^2$. Si las galletitas tienen 4 cm de diámetro y 0,5 cm de alto, ¿cuántas galletitas hay en el envase? $\pi \cdot 2^2 \cdot 2 + H \cdot \pi \cdot 4 = 28\pi \rightarrow 2^2 \cdot 2 + H \cdot 4 = 28 \rightarrow 8 + 4H = 28 \rightarrow H = 5 \rightarrow 5 : 0{,}5 = 10$. Hay 10 galletitas.

21. Completen para que las medidas sean equivalentes.

a. 3,5 m + 40 cm = 39 dm

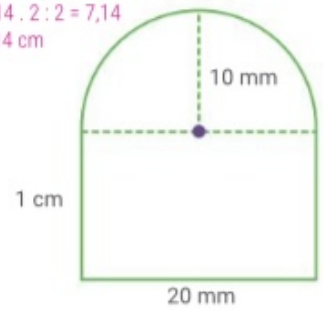
b. 3 km − 28 dam = 27,2 hm

c. 7,8 m + 0, 43 hm = 5, 08 dam

d. 1 250 mm + 2 dam = 21,25 m

22. Calculen el perímetro de la figura. Perímetro: 7,14 cm

10 mm = 1 cm; 20 mm = 2 cm
1 + 2 + 1 + 3,14 . 2 : 2 = 7,14
Perímetro: 7,14 cm



23. Escriban tres objetos cuyas áreas puedan estimar que tienen las siguientes medidas.

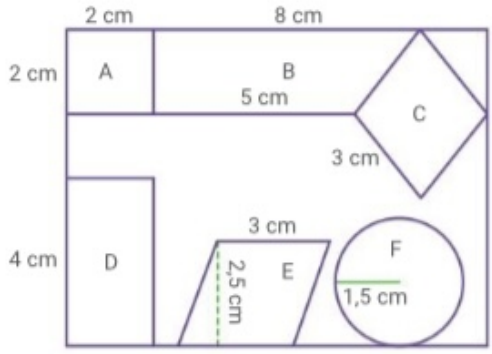
A cargo del alumno

a. Entre 10 cm² y 20 cm².

b. Entre 5 cm² y 10 cm².

c. Menos de 5 cm².

24. Observen la siguiente figura y resuelvan.



a. Indiquen el nombre de cada figura.

b. Calculen el perímetro de las figuras A, C, D y F.

c. Calculen el área de las figuras B, E y F.

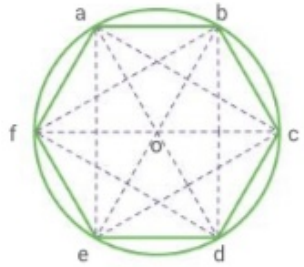
a. A: cuadrado; B: trapecio; C: rombo; D: rectángulo; E: paralelogramo; F: circunferencia.

b. Perímetro A = 8 cm; perímetro D = 12 cm; perímetro C = 12 cm; perímetro F = 9,42 cm

c. Área B = 13 cm²; área E = 7,5 cm²; área F = 7,07 cm²

25. Lean atentamente y resuelvan.

Se ha inscripto un hexágono de 5 cm de lado y de 4,35 cm de apotema en una circunferencia como muestra la siguiente figura.



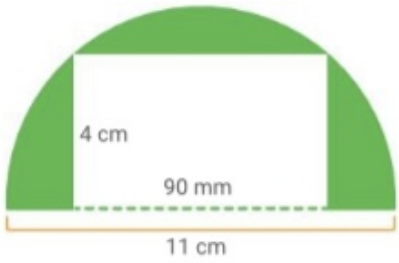
Reconozcan las distintas figuras que se pueden hallar en la ilustración y completen la tabla.

Polígono	Nombre	Área
abcd	Trapecio	32,63 cm²
abco	Paralelogramo	21,75 cm²
abde	Rectángulo	43,5 cm²
fbd	Triángulo	32,63 cm²
abcdef	Hexágono	62,25 cm²

26. Calculen el área de cada figura sombreada.

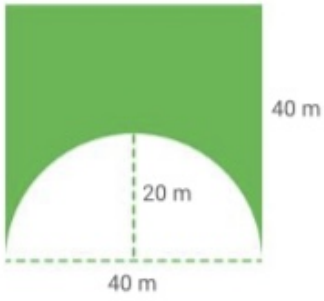
a. Área: 11,49 cm²

90 mm = 9 cm
3,14 . 5,5² : 2 − 4 . 9 = 47,49 − 39 = 11,49
Área: 11,49 cm²



b. Área: 972 m²

40² − 3,14 . 20² : 2 = 1 600 − 628 = 972
Área: 972 m²



27. **Lean atentamente y respondan.**

Un grupo de chicos armó un cubo de cartulina de 1 dm de arista para guardar un regalo para su docente por el Día del Profesor. Para decorarlo, cubrieron todas las aristas con cinta de color rojo.

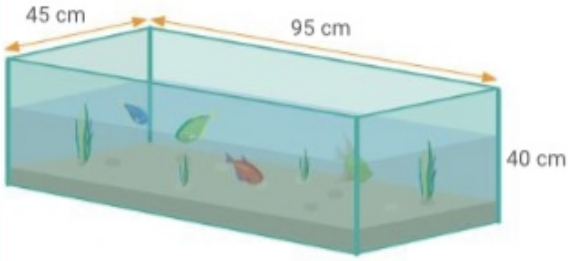
a. ¿Cuántos metros de cinta usaron?
Usaron 1,2 m de cinta.

b. ¿Cuántos cm^2 de cartulina necesitaron?
Necesitaron 600 cm^2 de cartulina.

28. **Resuelvan.**

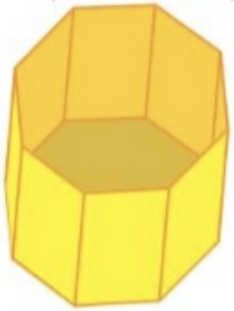
Un baúl para herramientas tiene las siguientes dimensiones: largo 1,35 m, ancho 48 cm y alto 5,1 dm. ¿Cuál es el área total del baúl (con tapa)?
El área total del baúl con tapa es 3,16 m^2. Sin tapa: 2,51 m^2.

29. **Calculen el área del vidrio de esta pecera.**
Área: 15 475 cm^2 (45 . 95 + 2 . 40 . 95 + 2 . 40 . 45)



30. **Lean atentamente y resuelvan.**

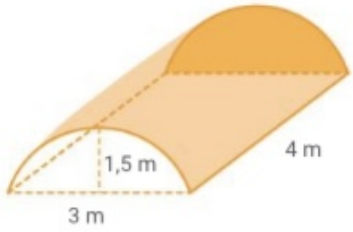
a. Un papelero con forma de prisma octogonal se debe forrar con papeles de colores por dentro y por fuera. La base se deja como está. La altura es de 34 cm, cada arista de la base mide 1 dm y la apotema, 0,87 dm. ¿Cuántos cm^2 de papel se necesitan?
Si la base no se cubre, se necesitan 5 440 cm^2.
1 dm = 10 cm (2 . 8 . 10 . 34 = 5 440)



b. Se desea pintar el exterior de un tanque de forma cilíndrica de 1,2 m de diámetro y 1,5 m de alto. Si el costo de la mano de obra es de $200 por m^2, ¿cuánto se gastará por el trabajo?
Gastará (sin bases) $1 130,4 (200 . 3,14 . 1,2 . 1,5). Gastará (con bases) $1 582 [200 . (2 . 3,14 . $0,6^2$ + 3,14 . 1,2 . 1,5)]

31. **Resuelvan.**

El tinglado de un garaje necesita una estructura de policarbonato como muestra la imagen.



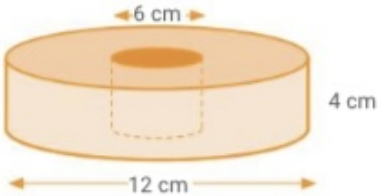
a. ¿Qué forma tiene la estructura para armar el techo? Es la mitad de un cilindro.

b. ¿Cuántos metros de caño se necesitan para los marcos? Para los marcos se necesitan 17,42 m de caño.

c. ¿Cuántos m^2 de policarbonato se necesitan para cubrirlo?
Para cubrirlo se necesitan 18,84 m^2 de policarbonato.

32. **Lean atentamente y resuelvan.**

Una fábrica metalúrgica produce piezas cilíndricas huecas como la de la imagen. ¿Cuál es el área total de la pieza?
El área total de la pieza es 395,64 cm^2.



33. **Descifren el mensaje oculto.**

39. Unidades de capacidad y unidades de volumen

▶ SABERES DINÁMICOS

Se llama **volumen** al lugar que ocupa un cuerpo, y **capacidad** a aquello que puede contener.

Unidades de volumen

Un **metro cúbico (1 m³)** es el volumen que ocupa un cubo de 1 m de arista.

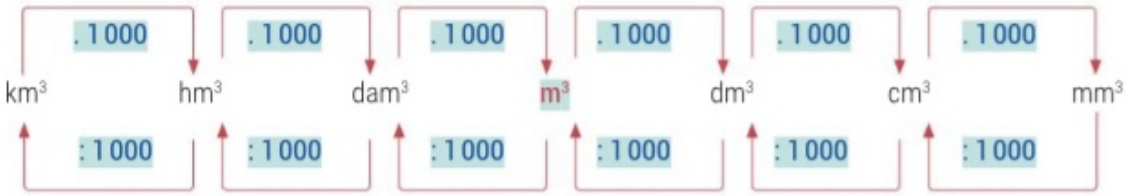
Para armar 1 m³ son necesarios 1 000 dm³.

Para pasar de una unidad de volumen a otra que sea su inmediata inferior, se debe multiplicar por 1 000, y para pasar a su superior, se debe dividir por 1 000.

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/volum* para entender el concepto de volumen y de capacidad.

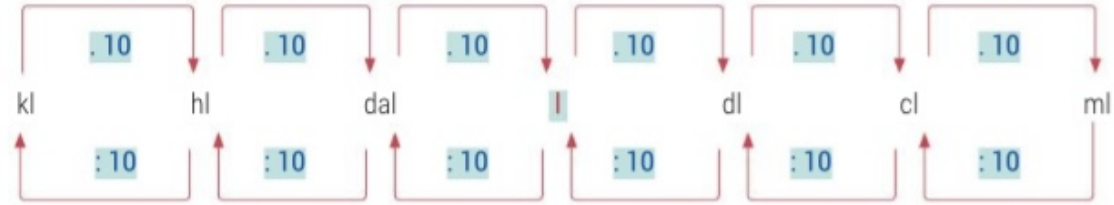
* Enlace acortado de https://youtu.be/AJ0703EA91Y?t=757



Unidades de capacidad

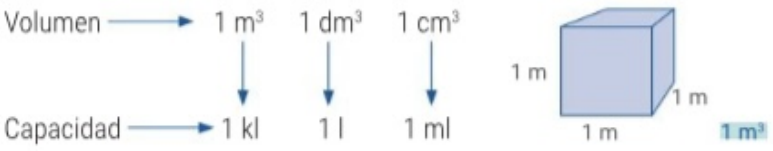
La capacidad de un cuerpo se mide en **litros**.

Un litro es la cantidad contenida en un volumen de un decímetro cúbico (1 dm³).



Relación entre volumen y capacidad

Un cubo de 1 metro de arista equivale a 1 000 litros.



Áreas dinámicas [Matemática y Ciencias Naturales]

Los embalses son grandes almacenamientos de agua. Su construcción lleva implícita la incorporación de un sistema que informa el nivel de agua existente en él y a partir del cual se tiene conocimiento de las reservas de agua disponibles. Las escalas están graduadas en centímetros y con ese dato se puede calcular el volumen de agua que puede contener. Una vez lleno de agua, y gracias a que se sabe que en 1 dm³ cabe 1 litro, el cálculo es muy sencillo.

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. Un recipiente de 1 000 cm³ ¿se puede llenar con 1 litro de nafta? Sí, porque 1 litro equivale a 1 dm³ que a su vez equivale a 1 000 cm³.
   b. ¿Cuántos cubos de 1 cm³ forman un cubo de 3 cm de arista? Un cubo de 3 cm de arista está formado por 27 cubos de 1 cm³.
   c. Realicen una tabla de doble entrada que muestre las equivalencias de 1 m³, 1 dm³ y 1 cm³ con kl, l y ml, cada una. A cargo del alumno.

ApAp

ACTIVIDADES

39. Unidades de capacidad y unidades de volumen

34. Expresen en la unidad que se indica.

a. 4 567 m^3 = 4 567 000 dm^3

b. 9 321 000 m^3 = 9,321 hm^3

c. 5 mm^3 = 0,005 cm^3

d. 3 400 cm^3 = 3 400 000 mm^3

e. 0,23 dam^3 = 230 m^3

f. 12 000 000 mm^3 = 0,012 m^3

35. Completen con >, < o = según corresponda.

a. 5 cl < 53 ml

b. 1,2 kl > 9 000 dl

c. 1 500 ml = 1,5 l

d. 354 cl > 0,3 l

36. Unan con flechas las cantidades equivalentes.

a. 1 litro → 1 000 cm^3

b. 10 litros → 10 dm^3

c. 0,001 hl → 100 cm^3

d. 10 ml → 10 000 mm^3

37. Lean atentamante y resuelvan.

Carolina y su hermano tienen catarro y el médico les recetó tomar un jarabe. La dosis recomendada es una cucharada de 2,5 cm^3 tres veces al día. ¿Cuántos días podrán tomar el medicamento si el frasco tiene una capacidad de un octavo de litro?

2,5 cm^3 . 3 . 2 = 15 cm^3 (dosis diaria para los dos); 1/8 litro = 1/8 . 1 000 cm^3 = 125 cm^3 (capacidad del frasco); 125 cm^3 : 15 cm^3 = 8,33

Podrán tomar el medicamento 8 días, y sobra un poco en el frasco.

38. Indiquen cuál de estos envases contiene más líquido. Expliquen cómo se dan cuenta.

El segundo envase tiene más líquido, para darse cuenta deben pasar todo a la misma unidad para poder comparar. El de agua tiene 2 000 cm^3, mientras que el de gaseosa tiene 2 250 cm^3.

DinámicaMente

Se colocaron $\frac{3}{4}$ litros de agua en un recipiente cúbico de 1 dm de arista.

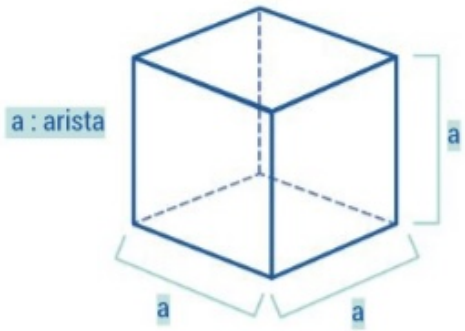
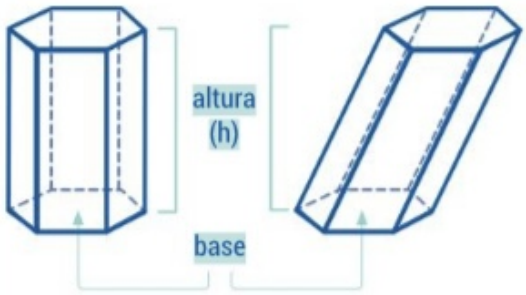
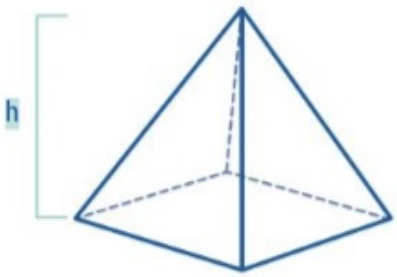
a. ¿Qué altura, en cm, tiene el agua del recipiente? El agua del recipiente tiene una altura de 7,5 cm (3/4 . 10).

b. ¿Cuántos cm^3 quedan sin agua? Quedan 250 cm^3 del recipiente sin agua (1 − 3/4 . 1 000).

40. Volumen de poliedros

▶ SABERES DINÁMICOS

En la siguiente tabla se presentan las fórmulas del **volumen del cubo** (como caso especial del prisma), **del prisma** y **de la pirámide**.

Cuerpo		Fórmula del volumen
Cubo		a^3
Prisma		área de la base . h
Pirámide		$\frac{1}{3}$. área de la base . h

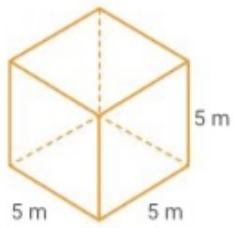
TEST DE COMPRENSIÓN

ApAp

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. Si el volumen de un cubo es 125 cm^3, ¿cuál es el área de sus bases? El área de sus bases es 25 cm^2.
   b. Si el área de la base de un prisma es 12 cm^2 y tiene 10 cm de alto, ¿cuál es el volumen? Su volumen es 120 cm^3.
   c. ¿Es cierto que el volumen de una pirámide es tres veces más grande que el volumen de un prisma que tiene su misma base y altura? ¿Por qué? Sí, es cierto, porque si al volumen de una pirámide se lo multiplica por 3 se obtiene:
   3 . V pirámide = 3 . 1/3 . área de la base . h = área de la base . h = V prisma.

39. Indiquen cuál es el volumen de cada cuerpo. Exprésenlo en m^3.

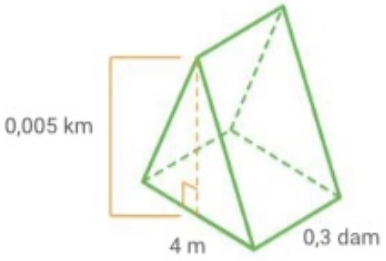
a.



$5^3 = 125$

Volumen: 125 m^3

b.

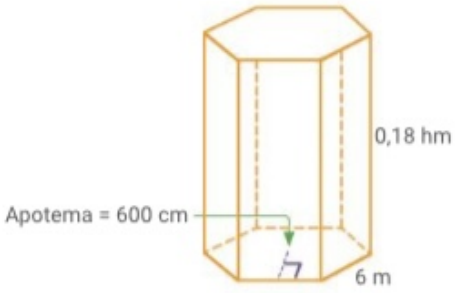


0,005 = 5 m; 0,3 dam = 3 m

5 . 4 : 2 . 3 = 30

Volumen: 30 m^3

c.

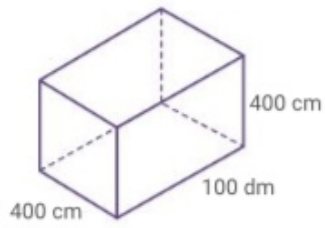


600 cm = 6 m; 0,18 hm = 18 m

6 . 6 . 6 : 2 . 18 = 1944

Volumen: 1944 m^3

d.

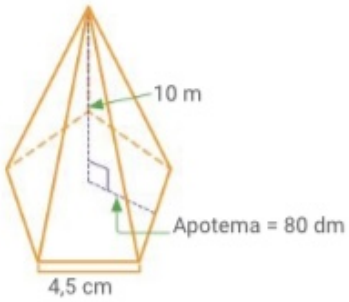


400 cm = 4 m; 100 = 10 m

4 . 4 . 10 = 160

Volumen: 160 m^3

e.



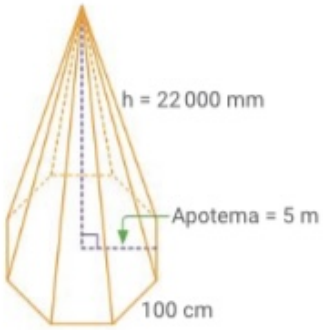
80 dm = 8 m; 4,5 cm = 0,045 m

1/3 . (5 . 0,045 . 8 : 2 . 10) =

1/3 . (9) = 3

Volumen: 3 m^3

f.



22 000 mm = 22 m; 100 cm = 1 m

1/3 . (8 . 1 . 5 : 2 . 22) =

1/3 . (440) = 146,67

Volumen: 146,67 m^3

40. Volumen de poliedros

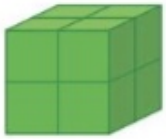
40. Lean atentamente y resuelvan.

Daniela construye bloques pegando cubos pequeños como el siguiente:

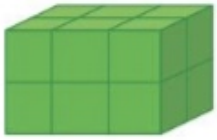
Cubo pequeño

Estos son los bloques que quiere formar Daniela:

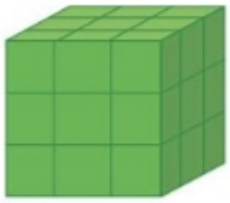
A



B



C



a. ¿Cuántos cubos pequeños necesita Daniela para formar el bloque C?

Bloque A: $2^3 = 8$; bloque B: $3 \cdot 2^2 = 12$; bloque C: $3^3 = 27$.

Daniela necesita 27 cubos pequeños para formar el bloque C.

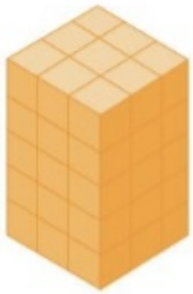
b. Si el área de cada cubo pequeño es de 4 cm^2, ¿cuál será el volumen del bloque B?

Si el área de cada cubo es 4 cm^2, la arista de cada cubo es 0,82 cm aproximadamente, entonces el volumen del bloque B es 6,62 cm^3.

$[0{,}82 \cdot 3 \cdot (0{,}82 \cdot 2)^2 = 2{,}46 \cdot 2{,}69 = 6{,}62]$

41. Lean atentamente y resuelvan.

El siguiente cuerpo tiene una altura de 5 cm y el área de su base es 9 cm^2.

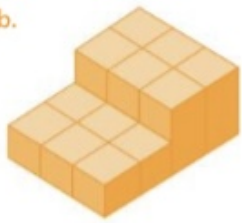


¿Qué volumen tiene cada uno de los siguientes cuerpos?

a.

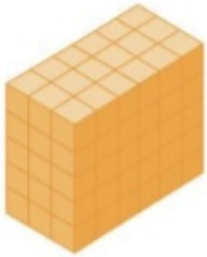
Volumen: 15 cm^3

b.



Volumen: 18 cm^3

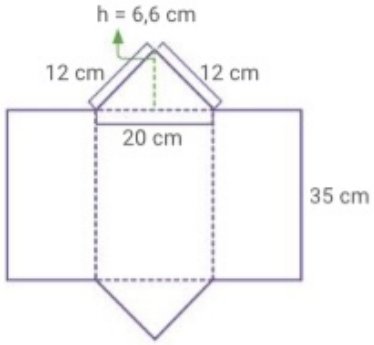
c.



Volumen: 90 cm^3

40. Volumen de poliedros

42. Tengan en cuenta el desarrollo plano de la siguiente figura y respondan.



a. ¿De qué cuerpo se trata?

Se trata de un prisma de base triangular.

b. ¿Cuál es su volumen en litros?

20 . 6,6 : 2 . 35 = 2 310

2 310 cm^3 = 2,310 litros. El volumen es 2,310 litros.

43. Resuelvan.

Una piscina tiene forma de prisma rectangular, de dimensiones 25 m de largo, 15 m de ancho y 3 m de profundidad. ¿Cuántos litros de agua son necesarios para llenar los $\frac{4}{5}$ de su capacidad?

25 . 15 . 3 = 1 125.

Volumen: 1 125 m^3 = 1 125 000 dm^3 = 1 125 000 litros

4/5 . 1 125 000 = 900 00

Son necesarios 900 000 litros.

44. Lean atentamente y resuelvan.

Desde 1989, el museo del Louvre, en París, exhibe en su entrada una enorme pirámide de vidrio que tiene como altura aproximada 22 metros y la base es un cuadrado de 30 metros de lado.

a. ¿Qué área del piso cubre la base de la pirámide?

30^2 = 900 La pirámide cubre 900 m^2.

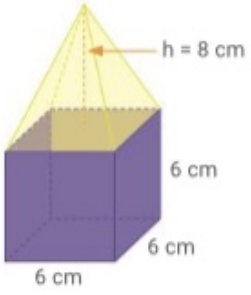
b. ¿Cuántas caras tiene la pirámide? ¿Qué forma tienen sus caras?

La pirámide tiene 4 caras, sus caras son triangulares.

c. ¿Cuál es el volumen de la pirámide?

1/3 . 900 . 22 = 6 600 El volumen de la pirámide es 6 600 m^3.

45. Tengan en cuenta las medidas señaladas y calculen el volumen de este cuerpo compuesto.



6^3 + 1/3 . 6^2 . 8 =

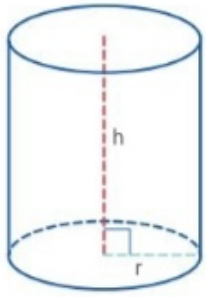
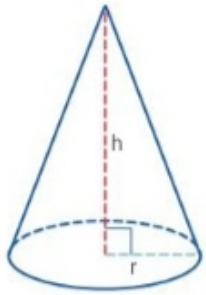
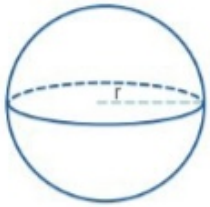
216 + 96 = 312

El volumen del cuerpo es 312 cm^3.

41. Volumen de cuerpos redondos

▶ SABERES DINÁMICOS

En la siguiente tabla se presentan las fórmulas del **volumen del cilindro**, **del cono** y **de la esfera**.

Cuerpo		Fórmula del volumen
Cilindro		$\pi \cdot r^2 \cdot h$
Cono		$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$
Esfera		$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

TEST DE COMPRENSIÓN

ApAp

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. ¿Es cierto que para calcular el volumen de un cilindro, hay que multiplicar el área de la base por la altura del cuerpo?
   b. Si el área de la base de un cono es de 78,5 cm² y tiene 10 cm de alto, ¿cuál es el volumen?
   c. ¿Es cierto que el volumen de un cilindro es tres veces más grande que el volumen de un cono que tiene su mismo radio de base y altura? ¿Por qué?

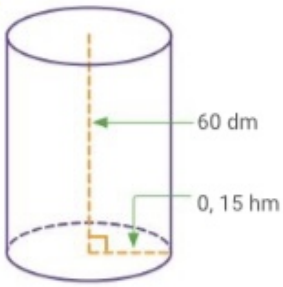
a. Sí, porque el área de la base del cilindro es $\pi \cdot r^2$ y su altura es h.
b. 1/3 . 78,5 . 10 = 261,67 Su volumen es 261,67 cm³.
c. Sí, porque si al volumen de un cono se lo multiplica por 3 se obtiene el volumen de un cilindro.
3 . Volumen del cono = 3 . 1/3 . $\pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h$ = Volumen del cilindro.

ACTIVIDADES

41. Volumen de cuerpos redondos

46. Indiquen cuál es el volumen de cada cuerpo. Exprésenlo en m^3.

a.

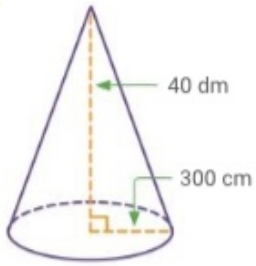


0,15 hm = 15 m; 60 dm = 6 m

$3{,}14 \cdot 15^2 \cdot 6 = 4\,239$

Volumen: 4 239 m^3.

b.

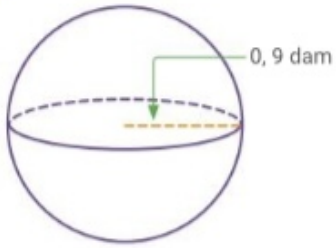


40 dm = 4 m; 300 cm = 3 m

$1/3 \cdot 3{,}14 \cdot 3^2 \cdot 4 = 37{,}68$

Volumen: 37,68 m^3.

c.



0,9 dam = 9 m

$4/3 \cdot 3{,}14 \cdot 9^3 = 3\,052{,}08$

Volumen: 3 052,08 m^3.

47. Calculen la altura de la lata.

Volumen del cilindro: $3{,}14 \cdot r^2 \cdot h$

$350 = 3{,}14 \cdot 3{,}3^2 \cdot h$

$350 = 34{,}19 \cdot h$

$350 : 34{,}19 = h$

$h = 10{,}24$

La altura de la lata es de 10,24 cm.

48. Calculen la altura de un cono de 10 dm de radio, si su capacidad es de 2 000 litros.

2 000 litros = 2 000 dm^3 Volumen del cono = $1/3 \cdot 3{,}14 \cdot r^2 \cdot h$

$2\,000 = 1/3 \cdot 3{,}14 \cdot 10^2 \cdot h$

$2\,000 = 104{,}67 \cdot h$

$2\,000 : 104{,}67 = h$

$h = 19{,}11$ La altura del cono es de aproximadamente 19,11 dm.

41. Volumen de cuerpos redondos

49. Lean atentamente y resuelvan.

a. En una fábrica de hielo se preparó un nuevo lanzamiento: producir hielo en esferas de dos tamaños diferentes. El modelo A tiene 50 mm de radio y el modelo B, 6 cm de diámetro. ¿Cuál es el volumen, en cm^3, de cada hielito producido?

50 mm = 5 cm

Modelo A: $4/3 \cdot 3{,}14 \cdot 5^3 =$

Modelo B: $4/3 \cdot 3{,}14 \cdot 3^3 =$

El volumen del modelo A es de 523,33 cm^3, y el del modelo B es 113,04 cm^3.

b. Franco compró una bocha de helado (semiesfera) en un cucurucho de 12 cm de altura y 5 cm de diámetro. Miguel tomó helado en un vasito cilíndrico de 3 cm de radio y 8 cm de altura, y el copete que le sirvieron era una semiesfera. ¿Quién tomó más helado?

Franco: $1/2 \cdot 4/3 \cdot 3{,}14 \cdot 2{,}5^3 + 1/3 \cdot 3{,}14 \cdot 2{,}5^2 \cdot 12 = 32{,}71 + 78{,}5 = 111{,}21$

Miguel: $1/2 \cdot 4/3 \cdot 3{,}14 \cdot 3^3 + 3{,}14 \cdot 3^2 \cdot 8 = 56{,}52 + 226{,}08 = 282{,}6$

Franco tomó 111,21 cm^3 de helado y Miguel 282,6 cm^3, es decir, Miguel tomó más helado.

CyRes **50. Lean atentamente y respondan.**

Aprovechando uno de los recursos renovables de la naturaleza y con el objeto de llevar agua potable desde una ciudad a los pueblos cercanos, se desea construir un río subterráneo con una cañería cilíndrica recta, de 16 km de longitud y 35 dm de diámetro.

a. Calculen el volumen, en litros, de agua que puede correr.

16 km = 160 000 dm

$3{,}14 \cdot 17{,}5^2 \cdot 160\,000 = 153\,860\,000$

153 860 000 dm^3 = 153 860 000 litros

Puede correr un volumen de 153 860 000 litros de agua.

b. ¿Por qué sería importante este río subterráneo?

A cargo del alumno.

DinámicaMente

Se desea fabricar un jarrón de hojalata de forma cilíndrica, de manera que su altura sea los $\frac{3}{2}$ de su radio y su capacidad, 10 litros.

a. ¿Cuántos cm^2 de hojalata se necesitan para confeccionar el jarrón, teniendo en cuenta que no lleva tapa?

b. ¿Qué porcentaje se usa de una chapa de hojalata de 1 m^2?

a. Se necesitan 2 094,16 cm^2 de hojalata para fabricar el jarrón.
b. Se usa el 20,94% de la chapa de 1 m^2.

41. Volumen de cuerpos redondos

Comu

51. Lean atentamente y resuelvan.

a. ¿Cuántos vasos de forma cilíndrica de 6 cm de diámetro y 8 cm de altura se pueden llenar con el contenido de una botella de 2,25 litros?

$3{,}14 \cdot 3^2 \cdot 8 = 226{,}08$ El volumen del vaso es 226,08 cm^3 = 0,226 litros. Cada vaso cilíndrico tiene una capacidad de 0,226 litros.

$2{,}25 : 0{,}226 = 9{,}96$ Con el contenido de la botella se podrán llenar aproximadamente 10 vasos, es decir, 9 vasos completos y el décimo le faltaría un poco.

b. ¿Cuántas copas de forma cónica de 6 cm de diámetro y 8 cm de altura se pueden llenar con el contenido de una botella de 2,25 litros?

$1/3 \cdot 3{,}14 \cdot 3^2 \cdot 8 = 75{,}36$ El volumen de la copa es 75,36 cm^3 = 0,075 litros. Cada copa cónica tiene una capacidad de 0,075 litros.

$2{,}25 : 0{,}075 = 30$ Con el contenido de la botella se podrán llenar aproximadamente 30 copas.

c. Expliquen cómo podrían resolver el ítem b sin usar la fórmula del volumen.

Se puede dividir por 3 la capacidad del vaso del ítem a para encontrar la capacidad de la copa del ítem b.

52. Resuelvan.

En una bodega se utilizó un barril con 0,35 kl de vino para llenar distintos recipientes. Se llenaron 9 damajuanas de 1 dal y 15 de 50 dl, 8 botellones de 4,5 l y 48 botellas de 75 cl. ¿Cuántos cm^3 quedan en el barril?

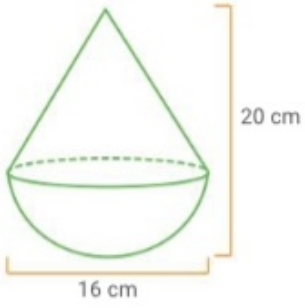
0,35 kl = 350 litros; 1 dal = 10 litros; 50 dl = 5 litros; 75 cl = 0,75 litros.

$350 - (9 \cdot 10 + 15 \cdot 5 + 8 \cdot 4{,}5 + 48 \cdot 0{,}75) = 350 - (90 + 75 + 36 + 36) = 350 - 237 = 113$

En el barril quedan 113 litros o 113 000 cm^3.

53. Tengan en cuenta las medidas señaladas y calculen el volumen de las figuras compuestas.

a.

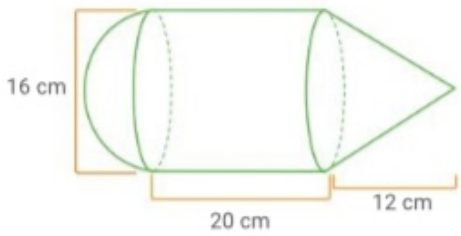


$1/3 \cdot 3{,}14 \cdot 8^2 \cdot 12 + 1/2 \cdot 4/3 \cdot 3{,}14 \cdot 8^3 =$

$803{,}84 + 1\,071{,}79 = 1\,875{,}63$

Volumen 1 875,63 cm^3.

b.



$1/2 \cdot 4/3 \cdot 3{,}14 \cdot 8^3 + 3{,}14 \cdot 8^2 \cdot 20 + 1/3 \cdot 3{,}14 \cdot 8^2 \cdot 12 =$

$1\,071{,}79 + 4\,019{,}2 + 803{,}84 =$

Volumen 5 894,83 cm^3.

Integración final

54. Escriban el nombre de tres objetos que tengan un volumen aproximado de 1 m^3; 1 dm^3; 1 cm^3 y 1 mm^3. A cargo del alumno.

55. Indiquen cuántos dm^3 le falta o le sobra a cada cantidad para llegar a 1 m^3.

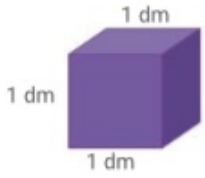
a. 999 dm^3 Le falta 1 dm^3.

b. 99 900 cm^3 Le faltan 900,1 dm^3.

c. 0,999 dam^3 Le sobran 998 000 dm^3.

56. Lean atentamente y resuelvan.

a. En un recipiente con forma de cubo que tenga 1 dm de largo, 1 dm de ancho y 1 dm de alto, cabe 1 litro de agua. ¿Cuántos litros caben en un recipiente de 1 m de largo, 1 m de ancho y 1 m de alto? En un recipiente de 1 m de largo, 1 m de ancho y 1 m de altura caben 1 000 litros.



b. El siguiente jugo tiene 4,5 cm de ancho, 3 cm de largo y 9 cm de alto. Lean lo que dice la tapa del jugo e indiquen si es correcto que tiene ese contenido? Expliquen cómo se dan cuenta.

No es correcto, porque el envase contiene 121,5 ml.

57. Reúnanse con un compañero y encuentren el error cometido en el siguiente razonamiento.

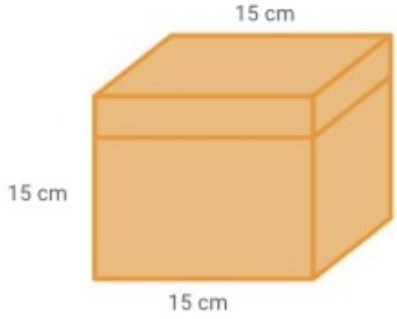
"Una caja de 30 cm de ancho, 50 cm de largo y 16 cm de alto se puede llenar con 192 cubitos de 5 cm de arista. Si las dimensiones de la caja son 30 cm, 50 cm y 16 cm, el volumen será 30 cm . 50 cm . 16 cm = 24 000 cm^3 y como el volumen del cubo es $(5\ cm)^3$ = 125 cm^3, se puede hacer 24 000 : 125 = 192 cubitos".

La superficie de la base de la caja es de 1 500 cm^2 y la superficie de la base de cada cubito es 25 cm^2, por ello, en la base entran 60 cubitos (1 500 : 25), y como la altura de la caja es de 16 cm y la de cada cubito es de 5 cm, solamente podrán apilarse 3 cubitos de alto, por eso en total podrán acomodarse en la caja 180 cubitos.

TracO
Fe de erratas: esta actividad debería tener el ícono de actividad grupal.

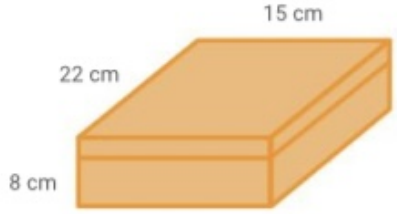
58. Marquen con una X la caja que tiene mayor volumen.

A

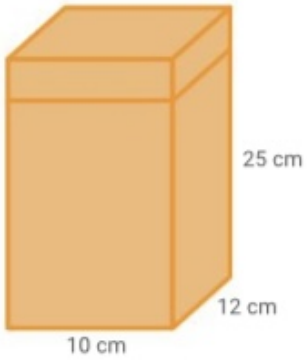


X

B



C



59. Rodeen la respuesta correcta.

Si se triplica el radio de la base de un cilindro y se mantiene constante su altura, ¿por cuánto queda multiplicado el volumen del cilindro?

3 6 (9) 12 15

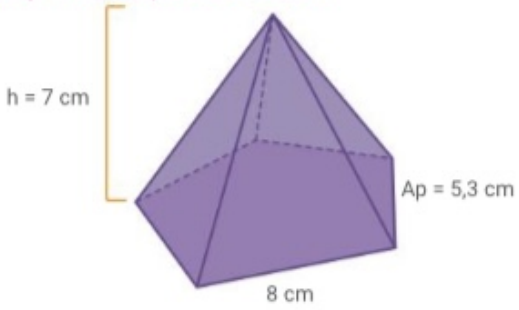
60. **Lean atentamente y resuelvan.**

a. Si se sabe que una vela aromática como la de la imagen tiene una altura de 15 cm y su base es un cuadrado de lado $\frac{1}{3}$ de la altura, ¿qué cantidad de vela se necesita para armarla?

Para armar la vela se necesitarán 125 cm³.

b. Para el Día del Amigo a Romina se le ocurrió armar una cajita en forma de pirámide como la del dibujo y agregarle gomitas masticables. Si la caja solo puede llenarse al 75%, ¿qué capacidad tiene?

La caja tiene una capacidad de 185,5 cm³.



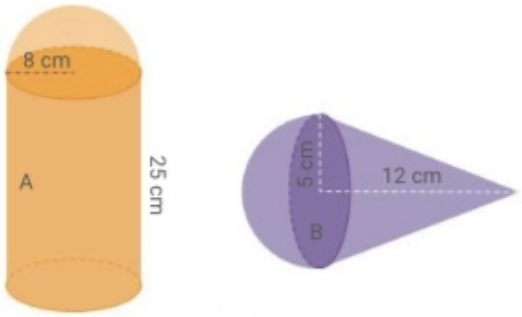
c. ¿Qué cantidad de aceite, en dm³, contiene este barril, si está ocupado un 80% de su capacidad?

El barril contiene 152,11 dm³ de aceite.

61. **Indiquen cuántos cm³ de dulce de leche, aproximadamente, se necesitan para hacer una docena de conitos que tienen una altura de 6 cm y el radio de su base es de 2,7 cm.**

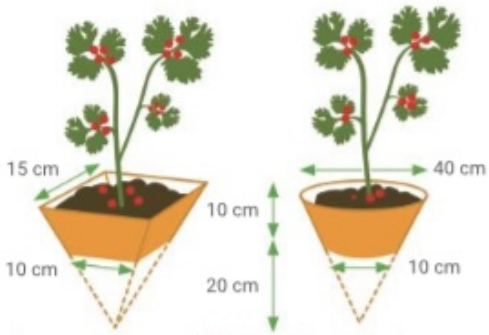
Se necesitan aproximadamente 549,36 cm³ de dulce de leche para hacer una docena de conitos.

62. **Observen las imágenes y completen con <, > o =, según corresponda. Expliquen la respuesta.**



Volumen de A [>] Volumen de B

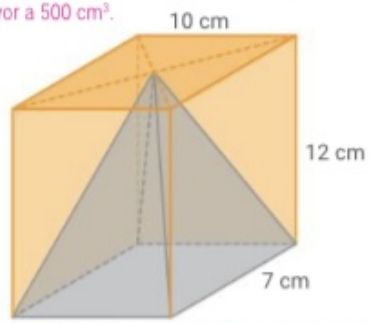
63. **Indiquen en cuál de estas macetas entra más tierra.**



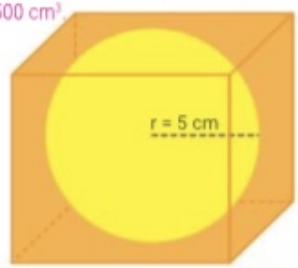
En la primera maceta entran 1 583,33 cm³ de tierra, mientras que en la segunda 12 036,67 cm³, por lo tanto, entra más tierra en la segunda.

64. **Indiquen si el volumen de la parte sombreada en naranja es mayor a 500 cm³, en cada caso.**

a. Volumen de la parte sombreada de naranja es de 560 cm³, por ello es mayor a 500 cm³.



b. Volumen de la parte sombreada de naranja es de 476,67 cm³; es menor a 500 cm³.



8 Probabilidad y estadística

42. Variables, población y muestra

▶ SABERES DINÁMICOS

Estadística

La **estadística** es una rama de la matemática que recolecta, describe, organiza y analiza datos con el fin de interpretar una situación o predecir algo en una cierta población.

Población y muestra

La **población** es el conjunto de individuos que es objeto de estudio (personas, animales, plantas, etc.). Si la población es muy numerosa, se selecciona una parte de la misma, que se llama **muestra**, la cual debe ser **representativa** (con características similares a la población).

Variables

La muestra se selecciona para investigar una o más características de una población que se denominan **variables**.
Existen dos tipos de variables:

- **Cuantitativas**: son las que se pueden medir; por ejemplo: la estatura de los alumnos, la cantidad de primos, la distancia de la escuela a su casa, etc.
- **Cualitativas**: son las que no se pueden medir; por ejemplo: el color de ojos, la carrera que desean estudiar en la universidad, etc.

Para obtener los datos estadísticos de la población, se toma una muestra, se selecciona una variable y, luego, se elige un método de recolección, como encuestas, entrevistas, observaciones, experimentos, etc.

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. Se quiere saber cuál es el medio de transporte más utilizado en la provincia de Buenos Aires. ¿Cuál es la población? "Los habitantes del partido de San Isidro", ¿podría ser considerada una muestra representativa? ¿Por qué?
   b. ¿Cuál es la variable del ítem anterior? ¿Es cualitativa o cuantitativa?
   c. Escriban una variable cuantitativa que esté asociada al medio de transporte.

ApAp

a. La población está formada por los habitantes de la provincia de Buenos Aires. Los habitantes del partido de San Isidro no sería una muestra representativa, porque no reunirían las características de todos los habitantes de la provincia, deberían elegirse personas al azar de toda la región.
b. La variable es "medio de transporte más utilizado en la provincia de Buenos Aires". Es cualitativa
c. Por ejemplo, "cantidad de medios de transporte que utilizan en un día los habitantes de la provincia".

ACTIVIDADES

42. Variables, población y muestra

TracO

1. En grupos discutan e indiquen si las siguientes muestras tomadas son o no representativas de la población y justifiquen. En caso de no serlo, propongan una mejor muestra.

a. Para saber cuántos hijos tiene cada familia de una cierta localidad se selecciona como muestra las familias que hay en una cuadra.

La muestra no es representativa, deberían tomarse familias de diferentes cuadras.

b. Para saber cuál es la especie de árbol más numerosa en la Argentina se selecciona como muestra los árboles ubicados en la provincia de Santa Fe.

La muestra no es representativa, se deben seleccionar árboles de diferentes provincias.

c. Para saber cuáles son los grupos de música favoritos de los 500 alumnos de una escuela secundaria se selecciona una muestra al azar de 60 alumnos de diferentes cursos.

La muestra es representativa de la población.

2. Indiquen cuáles de las siguientes variables son cualitativas y cuáles, cuantitativas.

a. Número de calzado de los estudiantes de entre 15 y 18 años. — Cuantitativa

b. Series televisivas que miran por día los habitantes de Buenos Aires. — Cualitativa

c. Redes sociales que utilizan los adolescentes. — Cualitativa

d. Cantidad de horas por día que utilizan el celular los empleados de una empresa. — Cuantitativa

3. Tengan en cuenta la actividad anterior y respondan.

a. Propongan alguna modificación de las variables anteriores para que las que son cuantitativas se conviertan en cualitativas y viceversa.

a. Tipo de calzado de los estudiantes de entre 15 y 18 años. (cualitativa)
b. Número de series televisivas que miran por día los habitantes de Buenos Aires. (cuantitativa)
c. Cantidad de redes sociales que utilizan los adolescentes. (cuantitativa)
d. Momento del día (mañana, tarde o noche) en que utilizan el celular los empleados de una empresa. (cualitativa).

b. Tengan en cuenta el ítem anterior, reúnanse en grupos y discutan si una variable puede ser cuantitativa y cualitativa a la vez.

La misma variable no puede ser cuantitativa y cualitativa a la vez.

PenCrit

4. Lean atentamente y respondan.

Un programa de televisión que se desarrolla de 8 a 9 am tiene una audiencia de 10 000 televidentes. Se realizó una encuesta entre la audiencia para saber a qué hora se despiertan los argentinos y 500 personas respondieron a la pregunta.

a. ¿Cuál es la población a la que se supone está dirigida la encuesta?

La población a la que se supone está dirigida la encuesta son los habitantes de la Argentina.

b. ¿Cuál fue la muestra? ¿Es representativa? ¿Por qué?

La muestra fue el grupo de 500 personas. No es representativa, porque por ser los televidentes del programa se encuentran despiertos antes de las 9 am.

c. Propongan una modificación en la pregunta de la encuesta y en la población para que la muestra sea representativa.

¿A qué hora se despierta la audiencia del programa? La población sería los televidentes del programa.

43. Frecuencias absolutas y relativas

▶ SABERES DINÁMICOS

Todas las variables estadísticas pueden tomar dos o más valores (por ejemplo: la variable "cantidad de horas por día que utiliza el celular un adolescente" puede tomar valores como 0; 1; 2; 3; 4;... ; 24). Para obtener los datos de una variable estadística al analizar cierta población, se necesita un instrumento de recolección de datos. Los más utilizados son: encuestas, entrevistas, observaciones, cuestionarios, experimentos, etc. A partir de sus resultados se pueden analizar las frecuencias de cada valor de la variable.

- **Frecuencia absoluta (f):** es la cantidad de veces que se repite un cierto valor de la variable.
- **Frecuencia relativa (fr):** es el resultado de dividir la frecuencia absoluta por el número de elementos de la muestra.
- **Frecuencia relativa porcentual (fr%):** es la frecuencia relativa expresada en forma decimal multiplicada por 100.

Población: 275 alumnos de una escuela de 2.º ciclo.

Variable: Cantidad de frutas que comen por día.

Muestra: 50 alumnos tomados al azar.

Valores de la variable: 0, 1, 2, 3, 4

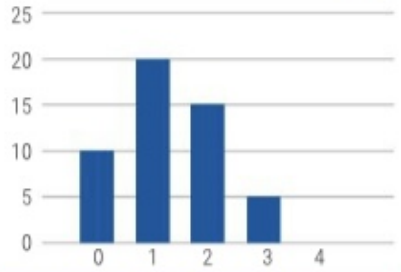
Encuesta realizada a 50 alumnos tomados al azar.

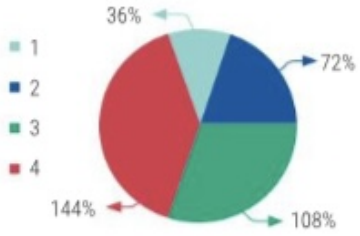
Pregunta: ¿cuántas frutas comés por día?

Cantidad de frutas	Cantidad de alumnos (f)	fr	fr%
0	10	$\frac{10}{50} = 0{,}2$	20%
1	20	$\frac{20}{50} = 0{,}4$	40%
2	15	$\frac{15}{50} = 0{,}3$	30%
3	5	$\frac{5}{50} = 0{,}1$	10%
4	0	$\frac{0}{50} = 0$	0%

Se pueden utilizar gráficos de barras, circulares y pictogramas para representar las frecuencias.

Cantidad de frutas que comen los alumnos por día





TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. En el ejemplo, ¿cuál es el resultado de la suma de todas las frecuencias relativas? ¿En cualquier otra estadística dará el mismo resultado? La suma de todas las frecuencias relativas es 1. Sí, siempre la suma de todas las frecuencias relativas será de 1.
   b. Si la población fuese de 500 alumnos, pero la muestra sigue siendo 50, ¿cambiarían los valores de las frecuencias? ¿Por qué? No, porque los valores de las frecuencias dependen de la muestra, no del tamaño de la población.

ApAp

   c. Completen las fórmulas teniendo en cuenta que "n" es la cantidad de elementos de la muestra y "f" es la frecuencia absoluta.

$fr = \frac{f}{n}$ $\qquad$ $fr\% = f/n \cdot 100$

ACTIVIDADES

43. Frecuencias absolutas y relativas

5. Lean atentamente y resuelvan.

En un noticiero realizaron esta encuesta: ¿qué recurso utilizan para despertarse los televidentes de nuestro programa? Los resultados están representados en la tabla.

Recurso para despertarse	f	fr	fr%
Reloj despertador	240	240/1 000 = 0,24	24%
Celular	650	650/1 000 = 0,65	65%
Un familiar	22	22/1 000 = 0,022	2,2%
La televisión	50	50/1 000 = 0,05	5%
Otro recurso	38	38/1 000 = 0,038	3,8%

a. ¿Cuál es la población? ¿Cuántas personas conforman la muestra?

La población está formada por los televidentes del programa, la muestra está conformada por 1 000 personas.

b. ¿Cuál es la variable? ¿De qué tipo es?

La variable es "recurso para despertarse", es del tipo cualitativa.

c. Completen la tabla.

CyRes

6. Lean atentamente y resuelvan.

Los alumnos de 1.º año están realizando un trabajo práctico de Biología. Quieren saber cuánto tiempo va a tardar en degradarse la basura que fue desechada ese día en la escuela. Identificaron algunos materiales de los cestos de basura de la escuela y los clasificaron según la cantidad de años que tardan en degradarse. Los resultados obtenidos de la observación fueron (en años):

1, 1, 1, 5, 50, 50, 50, 100, 100, 100, 100, 400, 400, 400, 400, 1 000, 1 000, 1 000, 4 000, 4 000

a. Completen la tabla.

Cantidad de años que tardan en desintegrarse	f	fr	fr%
1	3	3/20 = 0,15	15%
5	1	1/20 = 0,05	5%
50	3	3/20 = 0,15	15%
100	4	4/20 = 0,20	20%
400	4	4/20 = 0,20	20%
1 000	3	3/20 = 0,15	15%
4 000	2	2/20 = 0,10	10%
Total	20	1	100%

b. Busquen en Internet cuánto tiempo tardan en degradarse distintos materiales y escriban en la carpeta cuáles podrían haber sido los residuos que encontraron los alumnos.

Papel: 1 año, chicles: 5 años, gaseosas: 50 años, envases tetra-brik: 100 años, bolsas de plástico: 400 años, botellas de plástico: 1 000 años, botellas de vidrio: 4 000 años.

c. Respondan entre todos.

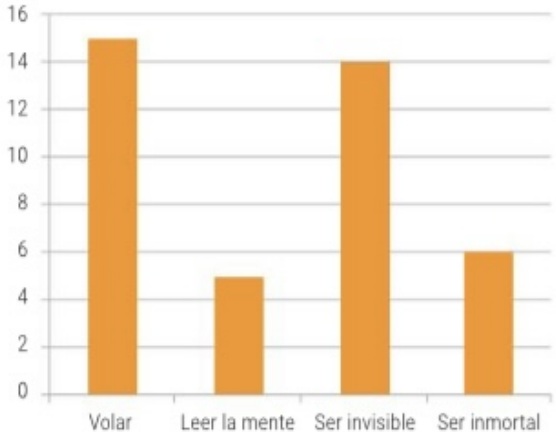
En sus casas ¿separan los residuos para ser reciclados? Teniendo en cuenta los tiempos de degradación que encontraron en el ítem anterior, ¿les parece importante hacerlo? ¿Por qué?

A cargo de los alumnos

43. Frecuencias absolutas y relativas

7. Observen el gráfico y respondan.

Un negocio de cómics realizó una encuesta a sus clientes con la siguiente pregunta: "De ser posible, ¿qué superpoder te gustaría tener?". Representaron los resultados en el siguiente gráfico de barras.



a. ¿Cuántas personas conforman la muestra?

La muestra está conformada por 40 personas.

b. Completen la tabla.

Superpoder que les gustaría tener	f	fr	fr%
Volar	15	15/40 = 0,375	37,5%
Leer la mente	5	5/40 = 0,125	12,5%
Ser invisible	14	14/40 = 0,35	35%
Ser inmortal	6	6/40 = 0,15	15%

c. ¿Cuál de los siguientes gráficos circulares es el que corresponde a la encuesta? ¿Por qué?

El gráfico 1, ya que los ángulos centrales se corresponden con cada uno de los porcentajes respectivos.

[X]

[ ]

[ ]

8. Completen las tablas y unan con flechas al gráfico que corresponda.

a.

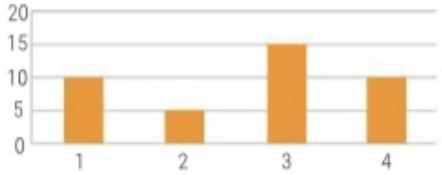
Valores	f	fr%
1	10	25%
2	5	12,5%
3	15	37,5%
4	10	25%
Total	40	100%

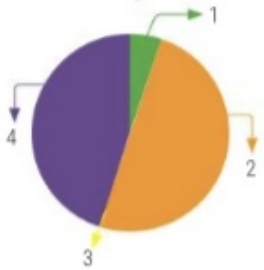
b.

Valores	f	fr
1	5	$\frac{1}{8}$
2	5	1/8
3	2	1/20
4	28	$\frac{7}{10}$
Total	40	1

c.

Valores	f	fr%
1	2	5%
2	20	50%
3	0	0%
4	18	45%
Total	40	100%



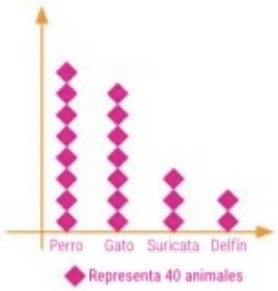


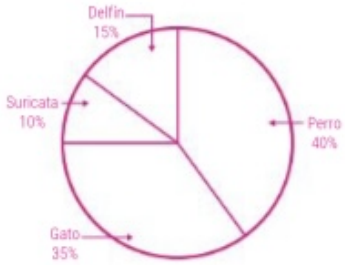
43. Frecuencias absolutas y relativas

9. Lean atentamente y resuelvan.

Se realizó una encuesta por Twitter acerca de cuál animal preferían entre el perro, el gato, la suricata y el delfín. Respondieron 800 personas. El 40% eligió "perro"; el 35%, "gato"; el 10%, "suricata" y el 15%, "delfín". Completen los datos en la siguiente tabla. Luego, realicen un gráfico de barras, un pictograma y un gráfico circular que representen los resultados obtenidos.

Animal	f	fr	fr%	Ángulo central
Perro	320	320/800 = 0,40	40%	144°
Gato	280	280/800 = 0,35	35%	126°
Suricata	80	80/800 = 0,10	10%	36°
Delfín	120	120/800 = 0,15	15%	54%
Total	800	1	100%	360°





A cargo de los alumnos.

TracO
CyRes

10. Investiguen qué es *grooming*. Comenten con el resto lo que encontró cada uno. Luego, resuelvan.

a. Realicen la siguiente encuesta entre todos.

¿Qué es lo primero que harían si se encuentran ante un caso de *grooming*? (Elijan solo una opción).

- ☐ Comunicarte con un adulto de confianza y contarle la situación.
- ☐ Bloquear/reportar al usuario que agrede y reconfigurar tu perfil en todas las redes sociales para hacerlo privado.
- ☐ Conservar las conversaciones o *chats* para disponer de ellas como prueba.
- ☐ Recurrir a la línea 102, "La línea de los chicos y las chicas" o al programa "Las víctimas contra las violencias". Teléfono: 137 (solo CABA).
- ☐ Comunicarte con el equipo Niñ@s, del programa "Las víctimas contra las violencias", teléfono 0800-222-1717. Mail: equiponinas@jus.gov.ar

b. Realicen en su carpeta una tabla de frecuencias con los resultados obtenidos.

c. Comenten los resultados de la encuesta. Pueden armar un folleto informativo o gráficos representativos con la información obtenida o seguir investigando. Incluso podrían hacer una encuesta más amplia.

44. Promedio, mediana y moda

▶ SABERES DINÁMICOS

Promedio

El **promedio** o **media** es igual a la suma de todos los valores de la variable dividida por la cantidad de elementos de la muestra. Se simboliza con $\overline{x}$.

Mediana

La **mediana** es el valor de la variable que ocupa el lugar central. Para obtenerla, primero hay que ordenar todos los valores de la variable de menor a mayor. Si la cantidad de los elementos de la muestra es par, la mediana es el promedio de los dos valores centrales. Se simboliza m_e.

Moda

La **moda** es el valor que más se repite, es decir, el que tiene mayor frecuencia. Puede haber más de una moda en una variable. Se simboliza m_o.

En un curso se les consultó a los 14 alumnos cuántos libros tenían en ese momento en su mochila. Los resultados fueron los siguientes:

2	3	3	2	3	1	0	1	2	1	3	1	3	3

Se colocan de menor a mayor:

0	1	1	1	1	2	2	2	3	3	3	3	3	3

El promedio o media

Se suman todos los valores de la variable y se divide por 14, que es el tamaño de la muestra.

$$\overline{x} = \frac{0+1+1+1+1+2+2+2+3+3+3+3+3+3}{14}$$

$$\overline{x} = 2$$

El promedio es 2.

La mediana

Como la muestra es de 14 alumnos y es un número par, se saca el promedio de los dos valores centrales.

$$m_e = \frac{2+2}{2}$$

$$m_e = 2$$

La mediana es 2.

La moda

El 0 aparece una vez;
el 1, cuatro veces;
el 2, tres veces;
y el 3, seis veces (se repite más).

$$m_o = 3$$

La moda es 3.

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. Si la variable es cualitativa, ¿se puede hallar el promedio y la moda? Si la variable es cualitativa, no se puede hallar el promedio, pero sí la moda.
   b. Si los datos se ordenan de mayor a menor, ¿cambiarían el promedio, la mediana y la moda? No cambia ninguno de los tres valores.
   c. Cambien los valores de la variable del ejemplo para que la moda, la mediana y el promedio sean 2.
   Un posible cambio es, el valor 0 por un valor 2, y dos valores de 3 por valores de 2.

ApAp

ACTIVIDADES

44. Promedio, mediana y moda

11. Calculen el promedio, la mediana y la moda de los valores de las siguientes variables.

a. 30; 32; 28; 30; 20; 18. $\bar{x}$ = 26,3 m_e = 29 m_o = 30

b. 102; 104; 102; 101; 99; 97; 96; 108; 100. $\bar{x}$ = 101 m_e = 101 m_o = 102

c. 36; 32; 2; 14; 8; 28; 28; 32. $\bar{x}$ = 22,5 m_e = 28 m_o = 28 y 32

d. 500; 250; 300; 500; 220. $\bar{x}$ = 354 m_e = 300 m_o = 500

12. Lean atentamente y respondan.

Los alumnos de 6.º año registraron cuántas botellas de plástico encontraron en cada cesto de basura de su escuela. Los resultados fueron los siguientes:

Cantidad de botellas	Cantidad de cestos (f)
8	2
9	4
10	2
12	8
16	3

a. ¿Cuántos cestos de basura hay en la escuela?

2 + 4 + 2 + 8 + 3 = 19 Hay 19 cestos de basura.

b. Sin hacer cálculos, ¿cuál es la moda? ¿Por qué?

La moda es 12, porque es la que tiene mayor frecuencia.

c. Tomando la tabla, sin hacer otra escritura, determinen cuál es la mediana; ¿cómo la encontraron?

La mediana es 12, por definición buscamos donde se encuentra el valor central de la variable, es decir, en la posición 10.

d. Hallen la media; ¿cuál es su significado con respecto al problema de la basura?

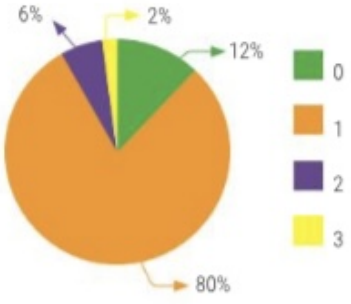
El valor de la media es 11,37. Significa que se desechan 11 botellas de plástico, en promedio, por cada cesto de basura.

e. Javier resolvió la cuenta anterior realizando el siguiente cálculo (8 + 9 + 10 + 12 + 16) : 19.
En cambio, Lorenzo lo hizo así: (8 . 2 + 9 . 4 + 10 . 2 + 12 . 8 + 16 . 3) : 19.
¿Alguno de los dos lo hizo correctamente? Justifiquen la respuesta.

Sí, quien lo hizo correctamente fue Lorenzo, ya que tuvo en cuenta la frecuencia de cada valor, es decir, las veces que se repetía cada uno, sin embargo, Javier no lo tuvo en cuenta porque solo sumo los valores que puede tomar la variable una sola vez.

13. Lean atentamente y resuelvan.

Se realizó una encuesta a 200 empleados de una empresa para saber cuántos medios de transportes utilizan a diario para ir al trabajo.
Los resultados fueron volcados en el siguiente gráfico:



a. Hallen la moda y la mediana sin realizar cálculos. Expliquen cómo resolvieron.

La moda es 1, porque es la que presenta mayor porcentaje y la mediana es 1 también, ya que sería el promedio de los dos valores centrales, por ser la muestra una cantidad par, y como el 80% toma valor 1, esos valores serán iguales a 1 y su promedio es 1.

b. Hallen la media (pueden guiarse con el ítem e de la actividad anterior).

$\bar{x} = \frac{0 \,.\, 24 + 1 \,.\, 160 + 2 \,.\, 12 + 3 \,.\, 4}{200} = 0{,}98$ La media es 0,98.

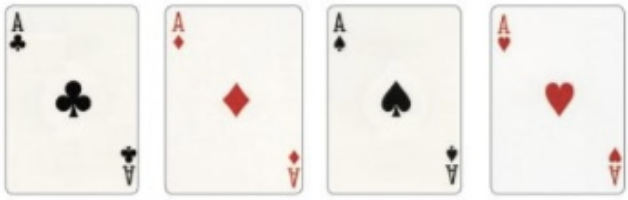
45. Experimentos aleatorios. Probabilidad simple

▶ SABERES DINÁMICOS

Experimentos aleatorios

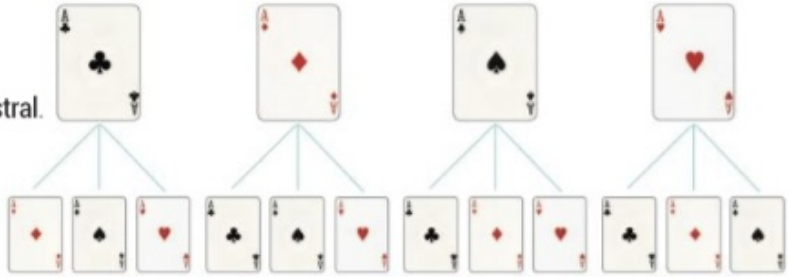
Un **experimento** es **aleatorio** si no se puede saber de forma anticipada cuál será el resultado, sino que depende del azar. Por ejemplo: cuando se lanza un dado no se puede saber qué número saldrá, por lo tanto lanzar un dado es un experimento aleatorio.

Experimento: se seleccionan los cuatro ases de las cartas de póker (AT = as de trébol, AD = as de diamantes, AP = as de pica, AC = as de corazones) y sin mirar se sacan dos. ¿En qué orden pueden salir?



Se llama **suceso** a cada uno de los posibles resultados del experimento.
Por ejemplo: AT-AC

El conjunto de todos los sucesos del experimento se llama **espacio muestral**. Para determinarlo se puede realizar un diagrama de árbol o una tabla. Cada rama del diagrama de árbol es un suceso.



Este experimento tiene un espacio muestral con 12 sucesos.

Probabilidad simple

De cada suceso del experimento aleatorio se puede calcular la **probabilidad** de que ocurra. El cálculo es el siguiente:

Probabilidad de un suceso (P) = $\frac{\text{cantidad de casos favorables}}{\text{cantidad de casos posibles}}$

El valor de la probabilidad es siempre un número entre 0 y 1, incluyendo el 0 y el 1.

Para hallar la probabilidad de que salga un as de trébol y un as de diamantes en cualquier orden, los casos favorables serían 2: AT-AD y AD-AT. La cantidad de casos posibles es 12, entonces $P = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

Áreas dinámicas [Matemática y redes sociales]

En la red social Instagram existen los llamados filtros de respuesta aleatoria que son creados por usuarios de la misma red social. Constan de preguntas como "¿Adónde irás de vacaciones?" "¿Qué harás en 10 años?", y su respuesta no depende de lo que escriba una persona, sino que la da el programa de forma aleatoria entre las opciones posibles que determinó el creador del filtro.

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. ¿Qué se puede decir de un suceso que tiene probabilidad 0? Que ese suceso es imposible que ocurra. Se lo denomina suceso imposible.
   b. ¿Cuál es la probabilidad de un suceso que tiene la misma cantidad de casos favorables que de casos posibles? ¿Qué significa? La probabilidad de un suceso que tiene la misma cantidad de casos favorables que de casos posibles tiene una probabilidad de 1. Significa que siempre ocurrirá, se lo denomina suceso seguro.
   c. Den un ejemplo de experimento aleatorio.
   Por ejemplo, "lanzar una moneda una cantidad dada de veces".

ApAp

ACTIVIDADES

45. Experimentos aleatorios. Probabilidad simple

14. Escriban V (verdadero) o F (falso) según corresponda. Expliquen todas las respuestas en la carpeta.

a. Lanzar un dado es un experimento aleatorio. No se puede predecir el resultado del experimento. — V

b. Sumar los números de las caras del lado es un experimento aleatorio. El resultado no depende del azar, siempre será 21. — F

c. Tirar una moneda no es un experimento aleatorio. No es posible conocer en forma anticipada el resultado del experimento. — F

d. Contar el número de letras que tiene una moneda no es un experimento aleatorio. Porque el resultado siempre estará bien determinado. — V

15. Dados los siguientes experimentos aleatorios, escriban el espacio muestral.

a. Lanzar un dado. {1, 2, 3, 4, 5, 6}

b. Lanzar una moneda dos veces. {cara-ceca, ceca-cara, ceca-ceca, cara-cara}

c. Joaquín, Candela, Sofía y Marcos escriben cada uno la inicial de su nombre en cuatro papeles de igual tamaño y los colocan en una bolsa. Se extraen de la bolsa dos papeles en orden.

J: Joaquín; C: Candela; S: Sofía; M: Marcos. {JC, CJ, JS, SJ, JM, MJ, CS, SC, CM, MC, SM, MS}

d. De dos bolilleros, uno con las letras A y B, y otro con los números 0, 1, 2, 3 y 4, se saca primero una letra y luego un número.

{A0, A1, A2, A3, A4, B0, B1, B2, B3, B4}

16. Calculen las probabilidades de los siguientes sucesos asociados a los experimentos de la actividad anterior.

a. Que salga el número 6. P = 1/6

b. Obtener dos caras. P = 1/4

c. Que salgan las iniciales de un hombre y una mujer. P = 8/12

d. Que salga cualquier letra con un número par. P = 6/10

17. Lean atentamente y resuelvan.

Tomás se despertó a las 6 am para ir a la escuela, con la luz apagada de la habitación abrió un cajón de su ropero donde guarda sus medias (unidas de a dos del mismo color). Allí tiene dos pares de medias blancas, uno negro y dos azules. Saca un par sin mirar.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que saque un par blanco? ¿Y un par azul? Comparen las probabilidades y averigüen cómo se llaman los sucesos que cumplen con esa condición.

P(Blancas) = 2/5, P(Azules) = 2/5. Se denominan sucesos equiprobables, por tener el mismo valor de probabilidad.

b. ¿Cuál es la probabilidad de que saque un par de medias verdes? ¿Cómo se llama ese suceso?

P(Verdes) = 0/5 = 0. Este tipo de sucesos se llaman imposibles.

c. ¿Cómo debería estar compuesto el cajón de Tomás para que la probabilidad de sacar un par blanco sea 1?

Todos los pares de medias deberían ser blancos.

d. Tomás sacó dos pares de medias en un determinado orden. Escriban el espacio muestral. Pueden realizar un diagrama de árbol en su carpeta.

{B_1B_2, B_1N, B_1A_1, B_1A_2, B_2B_1, B_2N, B_2A_1, B_2A_2, NB_1, NB_2, NA_1, NA_2, A_2B_1, A_2B_2, A_2N, A_2A_1}

DinámicaMente

Si en el cajón de Tomás las medias estuvieran sueltas, desordenadas y no unidas de a pares, ¿cuántas medias como mínimo tendría que sacar para obtener un par del mismo color? ¿Cuántas medias como mínimo para obtener un par blanco?

Para obtener un par del mismo color, debería sacar como mínimo 4 medias; y para obtener un par blanco, como mínimo, 8 medias.

46. Cálculo combinatorio

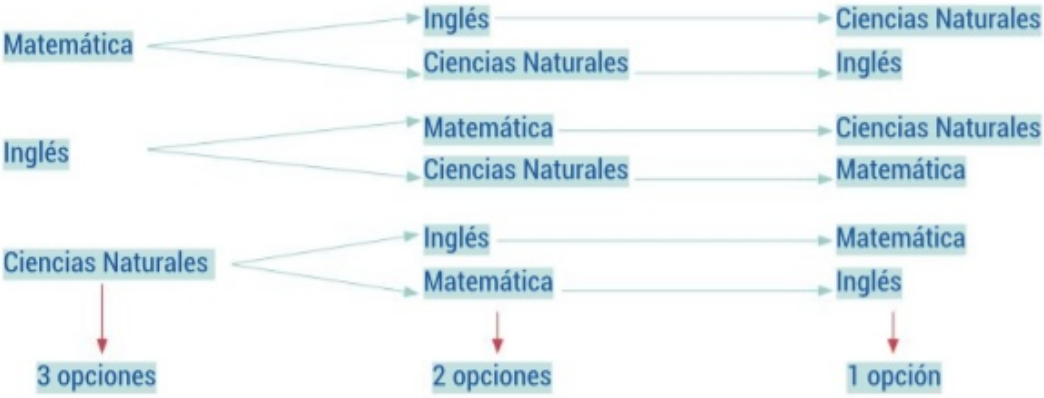
▶ SABERES DINÁMICOS

El **cálculo combinatorio** establece métodos de conteo que ayudan a formar y contabilizar las distintas agrupaciones que se pueden realizar con los elementos de uno o varios conjuntos.

• Con elementos de un conjunto:

Martín tiene en una carpeta las materias: Matemática, Inglés y Ciencias Naturales.
¿De cuántas formas distintas puede ordenar su carpeta?

Los elementos de este conjunto son: Matemática, Inglés y Ciencias Naturales, y las posibles agrupaciones se pueden representar con un diagrama de árbol.



Para contabilizar las diferentes formas de ordenar la carpeta se calcula 3 . 2 . 1 = 6.

También se puede utilizar una parte de un conjunto que posea una cierta condición.

Si Martín ubicó primero Ciencias Naturales, ¿de cuántas formas distintas puede ordenar su carpeta?
Como primero iría Ciencias Naturales, se calcula 1 opción . 2 opciones . 1 opción = 2 formas distintas de ordenar (solo la última rama del árbol).

• Con elementos de distintos grupos:

En el restaurante "Ruleta" cada comensal puede armar su propio menú, que consta de una entrada, un plato principal y un postre. Para armarlo tienen como opciones dos posibles entradas con cuatro diferentes platos principales y tres postres. ¿Cuántos menús diferentes se pueden formar?

En este problema hay tres grupos: "entradas" "platos principales" "postres".

2 opciones 4 opciones 3 opciones

Por lo tanto, se pueden formar 2 . 4 . 3 = 24 menús diferentes.

Dinámica TConecta

Ingresen en puerto.pub/combina* y observen el video donde se explica qué es la combinatoria, su utilidad y algunos ejemplos.

* Enlace acortado de https://youtu.be/tcGjGmQFMks

TEST DE COMPRENSIÓN

ApAp

1. Respondan y expliquen las respuestas.
   a. ¿Es cierto que si Martín agrega una materia a la carpeta, tendría 7 formas distintas de ordenarlas?
   b. ¿Es cierto que si Martín agrega una materia a la carpeta, tendría el cuádruple de formas de ordenarlas?
   c. ¿Es cierto que si el restaurante regala una sopa antes de la entrada, la cantidad de menús que se pueden formar es el doble? Si la respuesta es no, indiquen cuántos serían.

a. No, porque no se agrega una opción más al agregar una carpeta.
b. Al agregar una carpeta más, las opciones para ordenarlas están dadas por el siguiente cálculo:
4 . 3 . 2 . 1 = 24, es decir, el cuádruple de formas de ordenarlas.
c. Si el restaurante regala una sopa antes, la cantidad de menús no varía, porque el cálculo correspondiente sería: 1 . 2 . 4 . 3 = 24, en total 24 menús.

ACTIVIDADES

46. Cálculo combinatorio

18. Lean atentamente y resuelvan.
Cinco clubes de vóley compiten para el campeonato regional.

a. Teniendo en cuenta solo los puestos de campeón y subcampeón, ¿de cuántas formas diferentes puede resultar el campeonato?

El campeonato puede resultar de 20 formas diferentes. 5 . 4 = 20
opciones campeón opciones subcampeón

b. Si se tienen en cuenta los tres primeros puestos, ¿de cuántas formas diferentes puede resultar el campeonato?

Los tres primeros puestos se pueden formas de 60 formas diferentes. 5 . 4 . 3 = 60

c. Si el primer puesto ya está resuelto, ¿de cuántas maneras diferentes se pueden formar los tres primeros puestos?

Teniendo resuelto el primer puesto, los tres primeros puestos se pueden formas de 12 maneras diferentes. 1 . 4 . 3 = 12

19. Lean atentamente y respondan.
Sol tiene un candado cuya contraseña lleva dos números: el primero es un número par y el segundo, uno impar.

a. ¿Cuántas contraseñas se pueden formar?

Se pueden formar 25 contraseñas. (5 . 5 = 25)

b. Si el primer número fuese un 6, ¿cuántas contraseñas se podrían formar?

Si el primer número es un seis, se podrían formar 5 contraseñas. (1 . 5 = 5)

c. Sol piensa que si en su candado pudiese colocar en el primer y en el segundo lugar cualquier número, tendría el doble de contraseñas posibles; ¿es correcto? ¿Cuál es la relación?

Si pudiese colocar cualquier número en el primer y segundo número tendría 100 contraseñas, es decir, 10 . 10 = 100, por lo tanto, no es el doble de contraseñas, sino el cuádruple.

20. Lean atentamente y resuelvan.
Juan Manuel tiene que pintar en un mapa las provincias de Entre Ríos, Corrientes y Misiones. En su cartuchera tiene solo seis lápices de colores: rojo, azul, verde, lila, amarillo y gris.

a. Si pinta cada provincia con un color diferente, ¿de cuántas maneras distintas puede hacerlo?

Puede pintar el mapa de 120 maneras distintas. (6 . 5 . 4 = 120).

b. Si puede pintar las provincias del mismo color, ¿de cuántas maneras distintas puede hacerlo?

Si puede pintar las 4 provincias del mismo color, lo puede hacer de 216 formas distintas. (6 . 6 . 6 = 216).

c. Si a Entre Ríos la quiere pintar de color rojo y al resto con diferentes colores, ¿de cuántas maneras distintas puede hacerlo?

Si pinta de rojo a Entre Ríos y al resto de otro color, tendrá 20 formas diferentes de hacerlo. (1 . 5 . 4 = 20).

21. Calculen de cuántas maneras distintas se puede realizar cada caso.

a. Hay que ordenar cinco libros en el estante de una biblioteca.

Cinco libros en un estante se pueden ordenar de 120 maneras diferentes. (5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 120)

b. Hay que elegir entre cuatro plantas para trasladar a dos macetas (una planta por maceta).

Se pueden formar 12 macetas diferentes. (4 . 3 = 12).

c. Hay que formar un código que comience con una vocal y que continúe con dos números.

Se pueden formar 500 códigos diferentes. (5 . 10 . 10 = 500).

Integración final

22. Lean atentamente y respondan.

Los alumnos de primer año fueron a la huerta de la escuela y observaron cuántas semillas brotaron en cada maceta que cultivaron la semana pasada. Los resultados fueron los siguientes: 3, 3, 4, 5, 4, 2, 4, 5, 3, 3, 5.

a. ¿Cuál es la variable? ¿De qué tipo es?
"La cantidad de semillas que brotaron en cada maceta". Cuantitativa.

b. Completen la tabla de frecuencias.

	f	fr	fr%
2	1	1/11 = 0,09	9%
3	4	4/11 = 0,364	36,4%
4	3	3/11 = 0,273	27,3%
5	3	3/11 = 0,273	27,3%
Total	11	1	100%

c. Calculen la media, la mediana y la moda.
Media, $\bar{x} = 3,\widehat{72}$; Mediana, $m_e = 4$; Moda, $m_o = 3$

d. Realicen un gráfico de barras.
A cargo del alumno.

e. ¿Cuál es la probabilidad de que tome una maceta al azar y tenga 4 brotes? ¿Y que tenga 6 brotes?
P(4 brotes) = 3/11; P(6 brotes) = 0/11= 0.

f. Juana dice que si tomo al azar una maceta tengo una mayor probabilidad de agarrar una que tenga tres brotes; ¿es correcto? ¿Por qué?
Sí, porque es la que tiene mayor frecuencia, es decir, la moda.

23. Resuelvan.

La profesora de Ciencias Sociales tomó una evaluación con cinco preguntas *multiple choice* con tres opciones de respuesta cada una.

a. ¿Cuántas combinaciones diferentes de respuestas existen? Existen 243 combinaciones diferentes de respuestas. (3 . 3 . 3 . 3 . 3 = 243).

b. Sabiendo que hay solo una opción correcta para cada pregunta, ¿cuál es la probabilidad de que un alumno respondiendo las preguntas al azar acierte todas las respuestas? La probabilidad de contestar correctamente respondiendo al azar es de P = 1/243.

c. Si el alumno sabe la respuesta de la primera pregunta, ¿cuál es la probabilidad de que acierte las demás? Sabiendo la primera, la probabilidad de que acierte las demás es P = 1/81.

d. Luego de ser tomada esta evaluación en un curso de 24 alumnos, se sabe que $\frac{1}{3}$ obtuvo un seis, $\frac{1}{4}$ obtuvo un cuatro y $\frac{5}{12}$, un ocho; hallen la media y la moda.

Nota	f	fr	fr%
4	8	8/24 = 0,33	33%
6	6	6/24 = 0,25	25%
8	10	10/24 = 0,42	42%
Total	24	1	100%

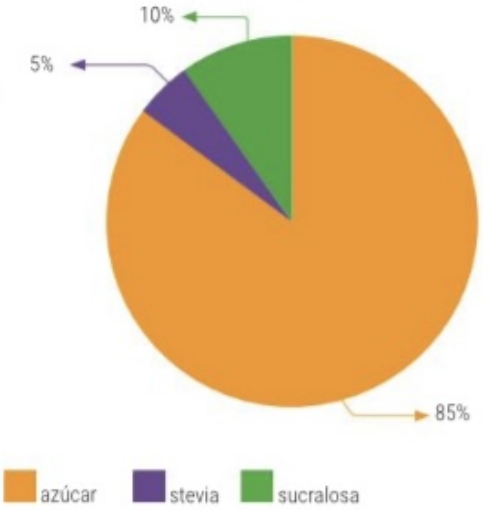
Media

$\bar{x} = \frac{4 \,.\, 8 + 6 \,.\, 6 + 8 \,.\, 10}{24} = 6,1\widehat{6}$

Moda: $m_o = 8$

24. Lean atentamente y respondan. CyRes

Se realizó una encuesta a 60 alumnos tomados al azar para saber qué tipo de endulzante utilizan los estudiantes de la institución. Se registraron los resultados en el siguiente gráfico.



a. ¿Cuál es la población y cuál es la muestra?
Población: "estudiantes de la institución"; muestra: 60 alumnos.

b. ¿Cuál es la variable y de qué tipo?
"El tipo de endulzante que utilizan los estudiantes". Es cualitativa.

c. Realicen una tabla de frecuencias.

	f	fr	fr%
Azúcar	51	51/60 = 0,85	85%
Sucralosa	6	6/60 = 0,10	10%
Stevia	3	3/60 = 0,05	5%
Total	60	1	100%

d. Hallen el promedio, la mediana y la moda.
Promedio y mediana no, por ser variable cualitativa. Moda: Azúcar.

e. Si se toma al azar un alumno entre los que realizaron la encuesta, ¿cuál es la probabilidad de que utilice sucralosa? P(sucralosa) = 6/60 = 0,10.

f. Si tengo que endulzar un té, un café y una leche chocolatada, ¿de cuántas formas diferentes puedo hacerlo? (Solo se puede utilizar un endulzante a la vez y se puede usar en más de una preparación).
Se puede hacer de 27 maneras diferentes (3 . 3 . 3 = 27).

g. Investiguen en Internet la diferencia entre los distintos endulzantes, sus beneficios y perjuicios. Escriban y compartan sus conclusiones con los compañeros.
A cargo del alumno.

25. Resuelvan.

En un bolillero hay 6 bolillas del 1 al 6, pero de diferentes colores: 4 de color rojo, 1 de color azul y 1 verde. Se extrae una al azar.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que sea roja? P(roja) = 4/6 = 2/3

b. ¿Cuál es la probabilidad de que no sea azul? P(no sea azul) = 1 – 1/6 = 5/6

c. ¿Cuál es la probabilidad de que sea azul o verde? P(azul o verde) = 2/6 = 1/3

d. Se sacan dos bolillas al azar ¿cuántas combinaciones de números es posible? Si se sacan dos bolillas al azar, son posibles 30 combinaciones de números (6 . 5 = 30).

26. Investiguen cómo está formado el mazo del UNO y resuelvan.

Se saca al azar una carta del mazo del UNO.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que sea una de color azul? P(azul) = 9/108

b. ¿Cuál es la probabilidad de que sea un 5 rojo? P(5 roja) = 2/108

c. Si Sol saca un 2 verde y no lo devuelve al mazo, ¿cuál es la probabilidad de que saque nuevamente un 2 verde? P(2 verde de nuevo) = 1/107

27. Respondan.

Facundo y Andrea están jugando al ludo con dos dados y con algunas reglas diferentes a las habituales.

a. Para sacar una ficha de la casa, la suma de los dos dados debe dar 6; ¿cuántas combinaciones con esa condición son posibles? ¿Cuál es la probabilidad de que esto ocurra? 5 combinaciones. P(suma 6) = 5/36.

b. Para que una ficha vaya directo a la meta tiene que salir un doble 6; ¿cuál es la probabilidad de este suceso? La probabilidad de este suceso es P = 1/36.

c. Si en una tirada sale el número 1 (en uno de los dados o en los dos) se puede, si se desea, volver a tirar los dados sin avanzar; ¿cuál es la probabilidad? La probabilidad de sacar 1 en un dado o en los dos es P = 12/36.

28. Lean atentamente y resuelvan.

Valeria observó cinco vehículos (autos y bicicletas) que pasaron por la puerta de su casa y contabilizó 14 ruedas.

a. Hallen el promedio de ruedas. Promedio de ruedas, $\bar{x}$ = 2,8.

b. ¿Cuántas bicicletas y cuántos autos pasaron? Pasaron 2 autos y 3 bicicletas.

c. ¿De cuántas diferentes formas pudo haber observado pasar los vehículos? Sin tener en cuenta la cantidad de ruedas que contó: de 4 formas. {1a4b; 2a3b; 3a2b; 4a1b}

d. Si se elige al azar uno de los vehículos que observó, ¿cuál es la probabilidad de que sea una bicicleta? La probabilidad de que sea una bicicleta es P = 3/5.

29. Lean atentamente y resuelvan. PenCrit

Romina anotó el número de teléfono de Pablo en un papel y cuando lo volvió a leer observó una mancha de chocolate que le tapó los últimos dos números:

a. Ella quiere agendar todos los posibles teléfonos que se pueden formar y preguntar por *Whatsapp* cuál es el de Pablo. ¿Qué opinan ustedes? ¿Cuántos números telefónicos deberá agendar? 100 números telefónicos (10 . 10 = 100). No conviene, son muchos.

b. Romina recuerda que ambos números eran pares, ¿cuántos números telefónicos son posibles? ¿Cuál es la probabilidad de hallar el número correcto? Si los últimos dos números son pares, son posibles 25 números telefónicos (5 . 5 = 25). P = 1/25.

c. Romina logró encontrar los dos dígitos y dice que es el promedio de los números 17, 28, 45, 23, 4 y 39. ¿Cuál es teléfono de Pablo? El promedio es, $\bar{x}$ = (17 + 28 + 45 + 23 + 4 + 39)/6 = 26 Número de Pablo es 11 5462 8426.

30. Lean atentamente y resuelvan.

Una familia quiere irse de vacaciones a Mar del Plata. Están analizando dos opciones de transporte: tren y micro, y algunas alternativas de alojamiento: cabaña, hotel y carpa.

a. ¿De cuántas formas diferentes pueden viajar de ida y alojarse en sus vacaciones? Pueden hacerlo de 6 formas diferentes. (2 . 3 = 6).

b. ¿Cuántas combinaciones pueden formarse considerando el viaje de ida y vuelta y el alojamiento? Pueden formarse 12 combinaciones. (2 . 3 . 2 = 12).

c. Si deciden ir en tren, ¿de cuántas maneras distintas pueden alojarse y volver a su casa? De 6 formas diferentes. (1 . 3 . 2 = 6).

d. Si la familia elige al azar el medio de transporte de ida y de vuelta y el alojamiento, ¿cuál es la probabilidad de que se alojen en el hotel? Probabilidad de que se alojen en un hotel es P = 4/12.

e. ¿Cuál es la probabilidad de que viajen ida y vuelta en tren? La probabilidad de que viajen ida y vuelta en tren es P = 3/12.

31. Lean atentamente y resuelvan.

La profesora de matemática evalúa los exámenes con notas de 0 a 10. Leila tiene un promedio de 6 en sus primeros cuatro exámenes de la materia.

a. ¿Cuál es la suma de los cuatro exámenes? La suma de sus cuatro exámenes es 24.

b. Si en el quinto examen obtuvo 8, ¿cuál es el promedio de las notas después de los cinco exámenes? El promedio de sus 5 exámenes es 6,4.

9 Números enteros

47. Números negativos

▶ SABERES DINÁMICOS

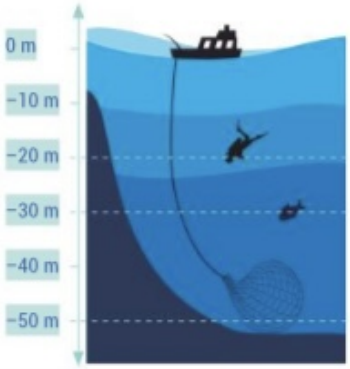
En los siguientes ejemplos se puede observar cómo los **números negativos** nos permiten expresar varias situaciones de la vida diaria en las que no nos alcanzan solo los números naturales.

Plantas de los edificios

La planta baja se representa con el cero, mientras que los pisos superiores son números positivos y los subsuelos son números negativos.

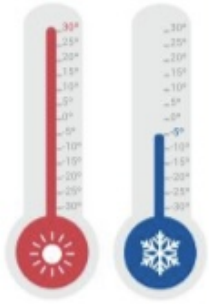
Nivel del mar

El nivel del mar se representa con el cero, las alturas por encima con números positivos, mientras que las profundidades con números negativos.



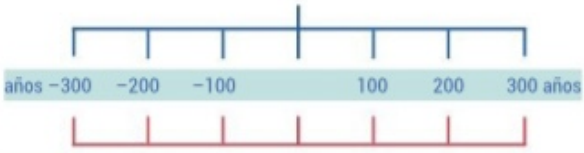
Temperaturas

Las temperaturas pueden variar mucho según el lugar y la época. Muchas veces está por encima de los 0 °C y se representa con números positivos, pero también puede estar por debajo de los 0 °C y se representa con números negativos.



Fechas anteriores y posteriores al nacimiento de Cristo

Las fechas en la historia cuando se trata de acontecimientos sucedidos antes del nacimiento de Cristo se representan con números negativos, mientras que si ocurrieron después del nacimiento de Cristo se representan con números positivos.



El conjunto de los **números enteros** es el formado por los enteros positivos (números naturales), el cero y los números negativos. Se lo representa con la letra Z.

$$Z = \{\dots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

- Los puntos suspensivos indican la existencia de infinitos números negativos y positivos.
- El cero no es positivo ni negativo.

TEST DE COMPRENSIÓN

ApAp

1. Respondan y expliquen sus respuestas.
   a. En el tablero de un ascensor, ¿qué significan los números −2 y −4?
   b. ¿Con qué número entero se puede representar que la profundidad de un lago es de 400 m?
   c. ¿Cuál es el mayor número entero negativo que existe? ¿Cuántos números negativos existen?

a. Significan que los pisos −2 y −4 se encuentran a 2 y 4 pisos por debajo de planta baja, es decir, en los subsuelos 2 y 4, respectivamente.
b. Se puede representar con el número −400 m.
c. El mayor número negativo que existe es el −1. Existen infinitos números negativos.

ACTIVIDADES

47. Números negativos

1. Representen cada una de estas situaciones utilizando un número entero.

a. La altura del Aconcagua es de 6 962 m sobre el nivel del mar. — 6 962 m

b. La pirámide de Keops se construyó alrededor del año 2560 antes de Cristo. — − 2 560

c. La empresa del papá de Julián tuvo una pérdida de $15 000 el mes pasado. — −$15 000

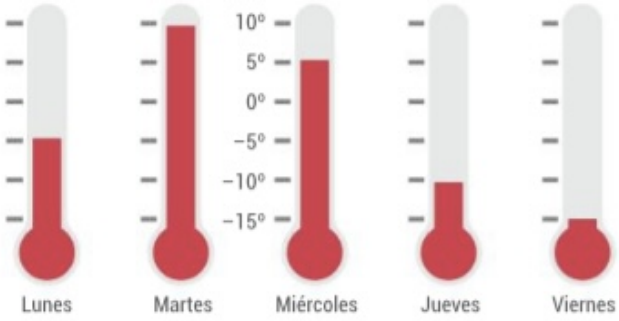
d. El depósito del edificio se encuentra en el primer subsuelo. — −1

e. El matemático Pitágoras nació en el año 569 antes de Cristo. — −569

f. La temperatura media en Saturno es de 192 °C bajo cero. — −192 °C

g. La mamá de Delfina cobró su sueldo de $20 000. — $20 000

2. Tengan en cuenta las temperaturas registradas durante una semana del mes de junio de 2019 en la base Marambio de la Antártida y completen la tabla.



Día	Temperatura
Lunes	−5 °C
Martes	10 °C
Miércoles	5 °C
Jueves	−10 °C
Viernes	−15 °C

a. ¿Qué día de la semana se registró la temperatura más baja?

El viernes.

b. ¿Qué día de la semana se registró la temperatura más alta?

El martes.

3. Escriban una situación que se represente por el número entero indicado en cada caso. A cargo del alumno.

a. −10 000

b. 0

c. −5

d. 500

48. Orden y representación

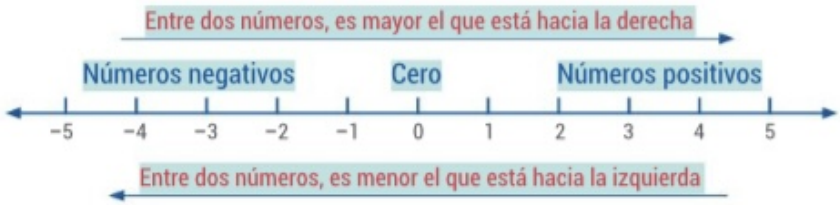
▶ SABERES DINÁMICOS

Todas las situaciones que se vienen describiendo tienen en común que, a partir de una referencia, los valores de los números son negativos o positivos; por ejemplo:

- A partir del nivel del mar, se toman valores positivos para las referencias sobre el nivel del mar o alturas, y valores negativos para sus profundidades.
- Para las temperaturas se toma como referencia el 0 °C; las temperaturas menores son negativas y las mayores, positivas.
- Para distinguir los sucesos anteriores al nacimiento de Cristo se usan números negativos y para los sucedidos después se usan números positivos.
- Para los saldos de cuentas bancarias, tarjetas de crédito o la SUBE se usan valores positivos cuando se posee dinero, pero si se debe dinero, se usan números negativos.

Todos estos casos se pueden representar en la recta numérica, tomando como referencia el cero, siguiendo estos pasos.

1. Se ubica el cero y se determina una distancia entre dos enteros consecutivos.
2. Se representan los negativos a la izquierda del cero y los positivos a la derecha.



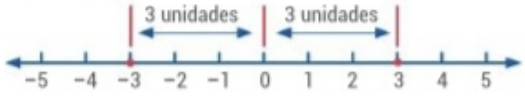
A partir de la representación en la recta, se puede decir que todo número que está a la derecha de otro es mayor, y si está a la izquierda es menor.

En palabras	En símbolos
−4 es menor que 1	$-4 < 1$
−3 es mayor que −4	$-3 > -4$

Valor absoluto

Se llama **valor absoluto** de un número a la distancia que existe entre ese número y el cero. Para indicar el valor absoluto de un número se lo coloca entre dos barras verticales, por ejemplo:

$|-3| = 3$ Se lee "valor absoluto de −3 es igual a 3".
$|3| = 3$ Se lee "valor absoluto de 3 es igual a 3".



Dos números son **opuestos** cuando tienen el mismo valor absoluto, pero distinto signo.

3 y −3 son opuestos. *$-(-3) = 3$ Se lee "el opuesto de −3 es 3".*

- Como el valor absoluto de un número expresa su distancia al cero, siempre es positivo o cero, nunca negativo.

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen sus respuestas.
   a. El opuesto de un número entero ¿siempre es negativo? No, si el número entero es negativo su opuesto será positivo.
   b. ¿Es cierto que dos números opuestos siempre tienen el mismo valor absoluto? Sí, porque se encuentran a la misma distancia del cero.
   c. Si $|a| = 2$, ¿cuál puede ser el valor de "a"?
   Los valores de a pueden ser 2 y −2, porque ambos se encuentran a la misma distancia del cero.

ApAp

ACTIVIDADES

48. Orden y representación

PenCrit

4. Corrijan los errores de las siguientes rectas numéricas y explíquenlos.

a.

No se respeta la distancia entre dos números consecutivos.

b.

La distancia para dos negativos consecutivos no coincide con la distancia entre dos positivos consecutivos.

c.

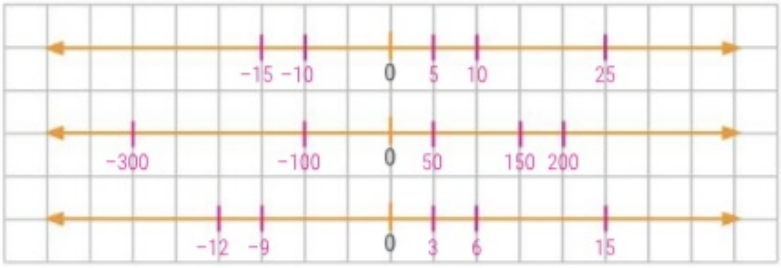
No figura el número 1 en la recta.

5. Ubiquen los números enteros en las rectas numéricas usando la escala que sea más adecuada.

a. −10, 5, 25, −15, 10

b. 200, −300, 50, −100, 150

c. −12, 3, 6, −9, 15



6. Completen con >, < o =, según corresponda.

a. $|-12|$ [>] $-(-7)$

b. $-|-34|$ [<] $-|-25|$

c. -8 [>] -11

d. $|-31|$ [<] $-(-32)$

e. $|-10|$ [=] $|10|$

f. 28 [>] -150

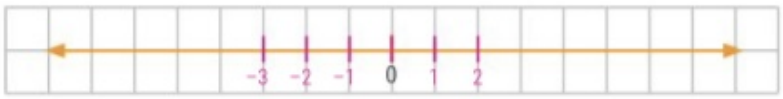
g. $|-5|$ [=] $-(-5)$

h. $-|12|$ [<] $|-12|$

7. Encuentren los números pedidos en cada caso. Luego, ubíquenlos en la recta numérica correspondiente.

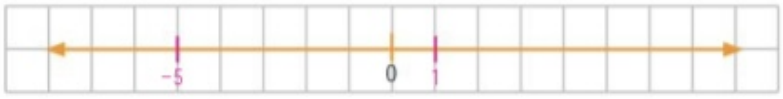
a. Escriban los números enteros mayores que −4 y menores que 3.

Los números son: −3; −2; −1; 0; 1 y 2.



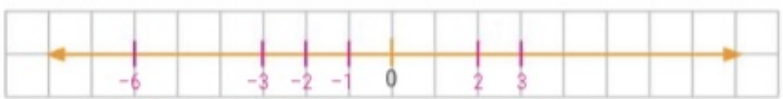
b. Escriban los números enteros que se encuentran a tres unidades de distancia de −2.

Los números son: 1 y −5.



c. Escriban los opuestos de cada uno de los siguientes números: $|-2|$, 6, 1, 0, $-(-3)$, -2, $-|-3|$.

−2; −6; −1; consideramos que el 0 no tiene opuesto; −3; 2; 3.



49. Adición y sustracción

▶ SABERES DINÁMICOS

Para **sumar** números enteros, se deben tener en cuenta los siguientes casos:

• Si los números enteros tienen el **mismo signo**, se suman sus valores absolutos y el resultado lleva igual signo que los sumandos.

$2 + 1 = 3$ $\qquad$ $-2 + (-1) = -3$

• Si los números enteros tienen **distinto signo**, se restan sus valores absolutos y el resultado lleva el signo del sumando con mayor valor absoluto.

$-3 + 5 = 2$ $\qquad$ $-27 + 12 = -15$

Para **restar** números enteros, se deben tener en cuenta los siguientes casos:

$4 - 3 = 1$ $\qquad$ $-4 - 3 = -7$

$4 - (-3) = 4 + 3 = 7$ $\qquad$ $-4 - (-3) = -4 + 3 = -1$

Criterios para eliminar paréntesis

• Si el **signo que precede al paréntesis es "+"**, el signo del número encerrado entre los paréntesis no cambia.

$-6 + (+2) = -6 + 2 = -4$ $\qquad$ $-3 + (-2) = -3 - 2 = -5$

• Si el **signo que precede al paréntesis es "−"**, el signo del número encerrado entre los paréntesis cambia.

$5 - (-2) = 5 + 2 = 7$ $\qquad$ $10 - (+8) = 10 - 8 = 2$

El siguiente problema se puede realizar sumando y restando números enteros.

Un día de invierno, la ciudad de Bariloche amaneció con cuatro grados bajo cero. Dos horas más tarde la temperatura había subido cinco grados. Al mediodía subió otros tres grados. Desde las cuatro de la tarde hasta las doce de la noche bajó siete grados, y desde las doce a las seis de la mañana bajó ocho grados. ¿Qué temperatura hacía a esa hora?

$$-4 + 5 + 3 - 7 - 8 = -11$$

Respuesta: a las seis de la mañana la temperatura era −11 °C.

c.

	Suma	Resta
Ejemplos	4 + (- 3) = 4 − 3 = 1	-2 − (-5) = -2 + 5 = 3
	-3 + (-2) = -3-2 = -5	1- (-6) = 1 +6 =7

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen sus respuestas.
   a. El resultado de sumar dos números opuestos, ¿siempre es cero? a. Sí, siempre.
   b. La suma de los valores absolutos de dos números enteros, ¿puede ser un número negativo?
ApAp c. Escriban 2 ejemplos de suma y 2 ejemplos de resta de números enteros donde se deban eliminar paréntesis. Resuélvanlos.

b. No, porque el valor absoluto siempre es mayor o igual que cero, por lo tanto, la suma nunca puede ser un número negativo.

ACTIVIDADES

49. Adición y sustracción

8. Resuelvan las siguientes operaciones.

a. $5 + (-3) =$ 5 − 3 = 2

b. $-2 + (-4) =$ −2 − 4 = −6

c. $-4 - (-4) =$ −4 + 4 = 0

d. $9 + (-3) - (-2) =$ 9 − 3 + 2 = 8

e. $|-2| - |-3| =$ 2 − 3 = −1

f. $6 + (-4) + 2 - (-3) =$ 6 − 4 + 2 + 3 = 7

g. $8 + (-5) - |-4| =$ 8 − 5 − 4 = −1

h. $-2 - (-10 + 12) =$ −2 + 10 − 12 = −4

9. Completen con el número que verifica la igualdad.

a. $-16 + (-2) + (-1) =$ [−18] $+ (-1)$

b. $-8 + (-2) + 6 =$ [−10] $+ 6$

c. $(-5 + 8) + (-4) =$ [2] $+ (-3)$

d. $|-3 + 5| - (-6) = |-2| +$ [6]

e. $-|-7| + (-4 + 8) = -7 +$ [4]

f. $-(-5 + 3) + |-4 - (-3)| = -($ [−2] $) + 1$

10. Lean atentamente y resuelvan. Expliquen las respuestas usando un cálculo cuando sea necesario.

Arquímedes (287 a. C. - 212 a. C.) y Pitágoras (569 a. C. - 500 a. C.) fueron dos grandes matemáticos griegos.

a. Expresen el año del nacimiento de cada uno como números enteros. Arquímedes: −287. Pitágoras: −569.

b. ¿Cuántos años vivió cada uno? Arquímedes vivió 75 años y Pitágoras, 69 años.

c. ¿Cuántos años después del nacimiento de Pitágoras nació Arquímedes? Arquímedes nació 282 años después que Pitágoras.

11. Escriban en lenguaje simbólico. Luego, calculen cuál o cuáles son los números.

a. Un número cuya distancia a cero es igual a 8.

$|x| = 8$. Los números son $x = -8$ o $x = 8$.

b. La diferencia entre un número y el valor absoluto de −3 es igual al opuesto de −1.

$x - |-3| = -(-1)$. El número es $x = 4$.

c. La suma entre un número y el anterior de −4 es igual al valor absoluto de −2.

c. $x + (-4 - 1) = |-2|$. El número es $x = 7$.

PenCrit

12. Completen la tabla teniendo en cuenta la información dada acerca de las temperaturas mínimas.

- En enero fue un grado superior a la de febrero.
- En mayo fue cuatro grados inferior a la del mes de abril.
- En julio fue la más fría, y fue seis grados inferior a la de abril.
- En septiembre fue cuatro grados mayor que la de junio.
- En noviembre fue la suma de los meses de agosto y abril.
- De octubre a diciembre aumentó cuatro grados.

Año 2019	Temperatura mínima	Año 2019	Temperatura mínima
Enero	9 °C	Julio	−1 °C
Febrero	8 °C	Agosto	1 °C
Marzo	7 °C	Septiembre	4 °C
Abril	5 °C	Octubre	5 °C
Mayo	1 °C	Noviembre	6 °C
Junio	0 °C	Diciembre	9 °C

50. Multiplicación y división

▶ SABERES DINÁMICOS

Para **multiplicar** o **dividir** números enteros se debe tener en cuenta si se trata de números de igual signo o de signos distintos. Para ello, se utiliza la **regla de signos.**

- Si los dos números que se multiplican o dividen tienen **signos iguales,** el **resultado** será **positivo**.

(+) . (+) = (+) $3 . 5 = 15$
(−) . (−) = (+) $-2 . (-4) = 8$
(+) : (+) = (+) $20 : 4 = 5$
(−) : (−) = (+) $-12 : (-3) = 4$

- Si los dos números que se multiplican o dividen tienen **signos distintos,** el **resultado** es **negativo**.

(+) . (−) = (−) $3 . (-5) = -15$
(−) . (+) = (−) $-2 . 4 = -8$
(+) : (−) = (−) $20 : (-4) = -5$
(−) : (+) = (−) $-12 : 3 = -4$

- En la **multiplicación**, si uno de los factores es **cero**, el resultado siempre es **cero**.

(+) . 0 = 0 $3 . 0 = 0$ (−) . 0 = 0 $(-4) . 0 = 0$
0 . (+) = 0 $0 . 10 = 0$ 0 . (−) = 0 $0 . (-9) = 0$

- En la **división**, el divisor nunca puede ser cero, y si el dividendo es cero, el resultado siempre es cero.

(+) : 0 = *no es posible* 0 : (+) = 0 $0 : 4 = 0$
(−) : 0 = *no es posible* 0 : (−) = 0 $0 : (-9) = 0$

- Cuando se resuelven **dos o más multiplicaciones o divisiones** en un mismo cálculo, se debe respetar el orden de las operaciones de izquierda a derecha.

$(-24) : 2 . (-4) = (-12) . (-4) = 48$ ✓ *Es correcto.*

$(-24) : 2 . (-4) = (-24) : (-8) = 3$ ✗ *No es correcto.*

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen sus respuestas.
   a. ¿Es cierto que $-(-4) = (-1) . (-4) = 4$?
   b. El doble de un número negativo, ¿es mayor o menor al número dado? Den un ejemplo.
   c. ¿Cuál es el resultado del cociente entre un número y su opuesto? Den un ejemplo.
   d. Realicen un diagrama que muestre todos los casos posibles de multiplicaciones de tres números enteros y el signo que tendrá el resultado en cada caso.

ApAp

a. Sí, porque el menos "− " delante del (−4) puede considerarse como un (−1) que lo multiplica.
b. El doble de un número negativo es menor al número dado, porque se encuentra más a la izquierda. Por ejemplo: 2 . (−4) = −8 y −8 < −4.
c. El cociente entre un número y su opuesto es −1. Por ejemplo: (−3) : 3 = −1.
d. A cargo del alumno.

ACTIVIDADES

50. Multiplicación y división

13. Resuelvan las siguientes multiplicaciones y divisiones.

a. $-3 \cdot 5 = -15$
b. $-2 \cdot (-4) = 8$
c. $-3 \cdot (-2) \cdot (-1) = -6$
d. $5 \cdot (-1) \cdot (-2) = 10$
e. $-2 \cdot 3 \cdot (-5) = 30$
f. $(-30) : 6 = -5$
g. $10 : (-5) = -2$
h. $-36 : (-9) = 4$
i. $-20 : 5 \cdot (-2) = 8$
j. $30 : (-3) \cdot 2 = -20$
k. $24 : (-2) : (-6) = 2$
l. $-28 : 4 : (-7) = 1$

14. Completen con el número entero que falta para que se cumplan las siguientes igualdades.

a. $\boxed{2} \cdot (-8) = -16$
b. $-10 : \boxed{-5} = 2$
c. $25 : \boxed{-25} \cdot (-1) = 1$
d. $24 : (-3) \cdot \boxed{0} = 0$
e. $60 : \boxed{-4} : 15 = -1$
f. $\boxed{0} : (-8) \cdot 3 = 0$
g. $2 \cdot \boxed{-10} : 5 = -|-4|$
h. $45 : (-9) \cdot \boxed{5} = -25$
i. $-(-12) : \boxed{4} = |-3|$

15. Completen la tabla.

a	b	a . b	-a . b	a . (-b)	-a : (-b)	|a| : b
−10	−2	20	−20	−20	5	−5
−6	3	−18	18	18	−2	2
12	−4	−48	48	48	−3	−3
15	5	75	−75	−75	3	3

16. Resuelvan e indiquen el número entero que representa la respuesta en cada caso.

a. Luis gana $12 000 al mes; si no gasta nada, ¿cuánto ahorrará en 3 meses?

3 . $12 000 = $36 000

Ahorrará $36 000. El número entero que representa la situación es 36 000.

b. Si por Internet paga $500 por mes, ¿cuánto gastará de Internet en 5 meses, si no aumenta la tarifa?

5 . $500 = $2 500

Gastará $2 500. El número entero que representa la situación es −2 500.

c. Romina gasta $100 en revistas por mes; si deja de comprarlas durante 4 meses, ¿cuánto logrará ahorrar?

4 . $100 = $400

Logrará ahorrar $400. El número entero que representa la situación es 400.

51. Operaciones combinadas

▶ SABERES DINÁMICOS

Una **operación combinada** es un cálculo en donde se combinan las cuatro operaciones vistas con números enteros, es decir, la suma, la resta, la multiplicación y/o la división.

Para resolverlas se debe tener en cuenta el orden o **jerarquía de las operaciones**, y se pueden seguir estos pasos:

1. Se separa en términos, teniendo en cuenta que los signos que separan términos son los de suma y resta.

2. Se resuelven las multiplicaciones y las divisiones, aplicando las reglas de signos.*

3. Se suprimen los paréntesis aplicando los criterios correspondientes.**

4. Se resuelven las sumas y las restas.

TIP

*En la página 169 pueden repasar las reglas de los signos.

**En la página 167 pueden repasar cómo eliminar los paréntesis.

$\overline{3 \cdot (-2)} - \overline{5 \cdot (-2)} - \overline{4 \cdot 2} + \overline{25 : (-5)} - \overline{(-11)} =$ **1.** Se separa en términos.

$-6 - (-10) - 8 + (-5) - (-11) =$ **2.** Se resuelven las multiplicaciones y las divisiones.

$-6 + 10 - 8 - 5 + 11 =$ **3.** Se suprimen paréntesis.

$(10 + 11) - (6 + 8 + 5) =$ **4.** Se resuelven las sumas y las restas.

$21 - 19 = 2$

Para resolver operaciones combinadas donde hay operaciones dentro de los paréntesis, se pueden seguir los siguientes pasos:

1. Se separa en términos, teniendo en cuenta que los signos de separación son los de suma y resta.

2. Se resuelven las operaciones que se encuentran dentro de los paréntesis.

3. Se resuelven las multiplicaciones y las divisiones, aplicando las reglas de signos.

4. Se suprimen los paréntesis aplicando los criterios correspondientes.

5. Se resuelven las sumas y las restas.

El siguiente problema se puede resolver usando operaciones combinadas.

Escriban el cálculo combinado y resuélvanlo.

"El doble del opuesto de 6 más un tercio del siguiente de –10."

"el doble" "el opuesto de 6" "el siguiente de –10" "un tercio"

$2 \cdot (-6) + (-10 + 1) : 3 =$

$\overline{2 \cdot (-6)} + \overline{(-10 + 1)} : 3 =$ **1.** Se separa en términos.

$2 \cdot (-6) + (-9) : 3 =$ **2.** Se resuelven las operaciones dentro de los paréntesis.

$-12 + (-3) =$ **3.** Se resuelven las multiplicaciones y las divisiones.

$-12 - 3 =$ **4.** Se suprimen paréntesis.

$= -15$ **5.** Se resuelven las sumas y las restas.

TEST DE COMPRENSIÓN

1. Respondan y expliquen las respuestas.

a. ¿Cuál es el resultado de $5 - 3 \cdot 4$? El resultado es −7.

b. ¿Es cierto que la diferencia entre la mitad de −4 y el opuesto de 5 es 3? Sí, porque $-4 : 2 - (-5) = -2 + 5 = 3$.

c. ¿Es cierto que la suma entre el triple de −2 y la mitad de −8 es 10? No, porque $3 \cdot (-2) + (-8) : 2 = -6 + (-4) = -6 - 4 = -10$.

d. Escriban los pasos que se deben seguir para resolver el cálculo $2 \cdot (-4) - (-9) : 3 + (-3) \cdot (-2)$.

d. $\overline{2 \cdot (-4)} - \overline{(-9) : 3} + \overline{(-3) \cdot (-2)} =$ 1.º Se separa en términos.

$-8 - (-3) + 6 =$ 2.º Se resuelven las multiplicaciones y divisiones, aplicando las reglas de signos.

$-8 + 3 + 6 =$ 3.º Se suprimen los paréntesis aplicando los criterios correspondientes.

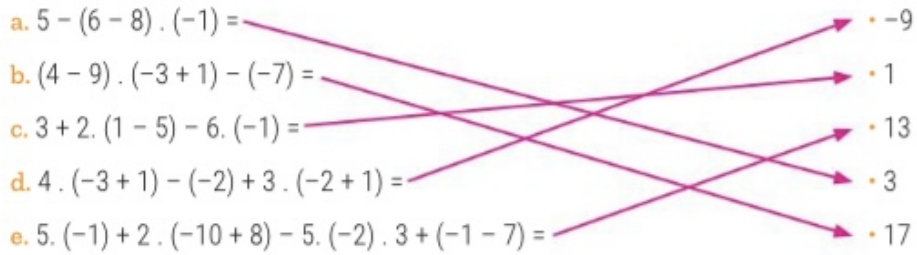
$-8 + 9 = 1$ 4.º Se resuelven las sumas y restas.

ApAp

ACTIVIDADES

51. Operaciones combinadas

17. Unan con flechas cada operación combinada con el resultado correcto en cada caso.



18. Encierren con un círculo el resultado correcto en cada caso.

a. $6 - (3 - 7) : (-2) =$	(4)	8	5
b. $4 + (5 - 1) : (-4) + 2 . (-9) : 3 =$	−8	−1	(−3)
c. $7 - (4 - 6) . (5 - 7) - 2 . (-4) =$	(11)	−10	19
d. $-4 - 4 . (-1 - 2) + 7 . (-1) =$	17	(1)	−23

19. Resuelvan los siguientes cálculos combinados.

a. $-5 . (-3) + 2 . (-7 + 9) + (-10) =$

$15 + 2 . 2 - 10 =$

$15 + 4 - 10 = 9$

c. $-(8 - 3) . (-2) + (-5) . (-4 + 6) =$

$-5 . (-2) + (-5) . 2 =$

$10 - 10 = 0$

b. $10 - 3 . (5 - 7) + (-4 + 1) . 2 =$

$10 - 3 . (-2) + (-3) . 2 =$

$10 + 6 - 6 = 10$

d. $(25 - 13) : (-4) - 18 : (-3) - (-5) =$

$12 : (-4) + 6 + 5 =$

$-3 + 6 + 5 = 8$

20. Coloquen paréntesis o corchetes donde corresponda para que se verifiquen los resultados.

a. $(7 - 3) . 2 + 4 . (-1) = 4$

b. $3 . 5 - (10 + 4) : 2 - 9 = -1$

c. $(4 - 2) . (7 + 3) = 20$

d. $(5 - 3) . (-4) + 15 : (-3) = -13$

21. Completen la tabla.

Lenguaje coloquial	Lenguaje algebraico	Resultado
La suma entre el doble de un número y la mitad de 8 es igual al opuesto de 2.	$2 . x + 8 : 2 = -2$	$x = -3$
La suma entre el triple de un número y el anterior de −7 es igual al valor absoluto de −4.	$3 . x + (-7 - 1) = \lvert -4 \rvert$	$x = 4$
La diferencia entre un número y el opuesto de 4 es igual al doble del opuesto de 3.	$x - (-4) = 2 . (-3)$	$x = -10$
La suma entre un número y su anterior más el valor absoluto del opuesto de 5 es igual al anterior de −3.	$x + (x - 1) + \lvert -5 \rvert = -3 - 1$	$x = -4$

51. Operaciones combinadas

22. Completen para que se verifiquen las igualdades.

a. $3 \cdot (a - b) = (\ a\ -\ b\ ) + (\ a\ -\ b\ ) + (\ a\ -\ b\ )$ b. $3 \cdot (a - b) = 3 \cdot \boxed{a} - 3 \cdot \boxed{b}$

• Si $a = -3$ y $b = 4$, verifiquen las igualdades anteriores.

$3 \cdot (-3 - 4) = (-3 - 4) + (-3 - 4) + (-3 - 4) = (-7) + (-7) + (-7) = -7 - 7 - 7 = -21$

$3 \cdot (-3 - 4) = 3 \cdot (-3) - 3 \cdot 4 = -9 - 12 = -21$

CyRes **23. Resuelvan.**

a. La mamá de Julián le dio $1 000 para los gastos de la semana. Si cada día gasta $50 en viaje para ir al colegio y $100 en la merienda, ¿le alcanza hasta el viernes? ¿Cuánto le sobra?

$\$1\,000 - [5 \cdot (\$50 + \$100)] = \$1\,000 - (5 \cdot \$150) = \$1\,000 - \$750 = \$250$

Sí, le alcanza hasta el viernes. Le sobran $250.

b. Juan salió de su casa para hacer las compras con $600. Compró pan por $80, tres gaseosas por $120 cada una y dos paquetes de fideos por $55 cada uno. Además, cuando volvía de las compras, se encontró $100: ¿con cuánto dinero regresó a su casa?

$\$600 - (\$80 + 3 \cdot \$120 + 2 \cdot \$55) + \$100 = \$600 - (\$80 + \$360 + \$110) + \$100 = \$600 - \$550 + \$100 = \$150$

Juan regresó a su casa con $150.

c. Un aire acondicionado logra bajar la temperatura 2 °C cada 15 minutos. Una tarde de verano de 36 °C Carolina decide prender el aparato esperando tener una temperatura de 20 °C en el interior de su casa. ¿Cuánto tiempo deberá esperar Carolina en su casa para la temperatura deseada?

36 °C – 20° C = 16 °C En 15 min baja 2 °C . En "15 min . 8 = 120 min" baja "2 °C . 8 = 16°C".

Carolina deberá esperar 120 minutos, es decir, 2 horas.

• ¿Es adecuada la temperatura a la que puso el aire acondicionado Carolina? ¿Por qué?

Se espera que digan que la temperatura recomendada es de 24 °C (si no lo saben, lo podrían averiguar).

PenCrit **24. Corrijan los errores en los siguientes cálculos combinados.**

a. $12 + 3 \cdot 2 - (-10) =$

$15 \cdot 2 + 10 =$

$30 + 10 = 40$

No se separó en términos adecuadamente.

Había que resolver primero "3 . 2".

b. $(-24) : 4 \cdot (-3) =$

$(-24) : (-12) = 2$

No se respetó el orden de las operaciones de izquierda a derecha.

Había que resolver primero "(−24) : 4".

c. $-3 \cdot 4 + 2 \cdot 5 - (-2) =$

$-12 + 10 - 2 =$

$-2 - 2 = -4$

No se aplicó el criterio de signos para eliminar paréntesis.

"− (−2)" debe quedar "+ 2".

d. $-(9 - 4) + |-2| + 2 \cdot 4 =$

$-5 - 2 + 8 = 1$

No se aplicó la definición de valor absoluto.

"|−2|" debe quedar "2".

51. Operaciones combinadas

25. Resuelvan los siguientes cálculos combinados en sus carpetas e indiquen cada uno de los pasos que hicieron para resolverlos.

a. $-(2-3)\,.\,[-6\,.\,(3-5+1)] =$

$-(-1)\,.\,[-6\,.\,(-1)] =$

$1\,.\,6 = 6$

b. $-4+3\,.\,(-2)-(6-10)\,.\,(-8+5) =$

$-4-6-(-4)\,.\,(-3) =$

$-10-12 = -22$

c. $(-4-10):(-7)+(5-2\,.\,3)\,.\,(-2)\,.\,(-3) =$

$-14:(-7)+(5-6)\,.\,(-2)\,.\,(-3) =$

$2+(-1)\,.\,(-2)\,.\,(-3) =$

$2-6 = -4$

d. $(-36):(-9)-[-2-(-5-4)]\,.\,2+1 =$

$4-[-2-(-9)]\,.\,2+1 =$

$4-(-2+9)\,.\,2+1 =$

$4-7\,.\,2+1 =$

$4-14+1 = -9$

e. $-4-10:(-2)-[6+20:(-5)] =$

$-4+5-(6-4) =$

$-4+5-2 = -1$

f. $-(-3+7)-18:(-3):3\,.\,(-20+18) =$

$3-7-(-6):3\,.\,(-2) =$

$3-7-4 = -8$

26. Encuentren los valores de "x" que verifican las siguientes igualdades.

a. $|x|\,.\,(-3)+4 = -2$

$|x|\,.\,(-3) = -2-4 \rightarrow |x| = -6:(-3) \rightarrow$

$|x| = 2 \rightarrow x = -2$ o $x = 2$.

b. $2\,.\,|x|+(-18):3 = 2$

$2\,.\,|x|-6 = 2 \rightarrow 2\,.\,|x| = 2+6 \rightarrow$

$|x| = 8:2 \rightarrow |x| = 4 \rightarrow x = -4$ o $x = 4$.

27. Resuelvan.

a. Matías fue a la librería y compró dos cuadernos por $120 cada uno, tres lapiceras a $10 cada una y un conjunto de reglas por $250. Pagó con tarjeta de débito, revisó el saldo de su cuenta y le quedaban −$120. ¿Cuánto dinero tenía antes de comprar en la librería?

$x-(2\,.\,\$120+3\,.\,\$10+\$250) = -\$120 \rightarrow x-(\$240+\$30+\$250) = -\$120 \rightarrow x-\$520 = -\$120 \rightarrow x = -\$120+\$520 \rightarrow x = \$400$

Antes de comprar Matías tenía en su cuenta $400.

b. Ángeles compró tres pantalones a $900 cada uno, cuatro remeras a $440 cada una y dos pares de zapatillas a $2 000 cada uno. Le realizaron los siguientes descuentos: $100 por cada pantalón, $120 por cada remera y $200 por cada par de zapatillas. ¿Cuánto pagó por toda la compra? Si había llevado $10 000, ¿cuánto le sobró?

$3\,.\,\$900+4\,.\,\$440+2\,.\,\$2\,000-3\,.\,\$100-4\,.\,\$120-2\,.\,\$200 = \$2\,700+\$1\,760+\$4\,000-\$300-\$480-\$400 = \$8\,460-\$1\,180 = \$7\,280$

Ángeles pagó por toda la compra $7 280. $10 000 − $7 280 = $2 720 Le sobraron $2 720.

28. Escriban V (verdadero) o F (falso). Expliquen los casos falsos con un ejemplo en la carpeta.

a. El producto entre un número entero y su opuesto siempre es un número negativo. V

b. El cociente entre un número entero distinto de cero y su valor absoluto siempre es un número positivo. F
Por ejemplo $-3:|-3| = -3:3 = -1$.

c. La suma entre un número entero distinto de cero y su valor absoluto siempre es el doble del número. F
Por ejemplo $-4+|-4| = -4+4 = 0$.

Integración final

29. Escriban un número entero que represente cada situación.

a. Julián cobró su sueldo por $14 000.
14 000
b. Susana pagó $1 500 de impuestos.
−1 500
c. La cima del monte Everest se encuentra a 8 848 m sobre el nivel del mar.
8 848
d. Un submarino desciende a 400 m bajo el nivel del mar. −400
e. Aristóteles nació en el año 385 a. C.
−385
f. El ascensor está en el tercer subsuelo.
−3

30. Completen las siguientes rectas numéricas con los números que corresponden.

a. −7 | 0 | 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42

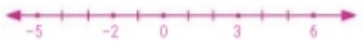
b. −48 | −39 | −30 | −21 | −12 | −3 | 6 | 15

c. −14 | −11 | −8 | −5 | −2 | 1 | 4 | 7

d. −6 | −3 | 0 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15

31. Ubiquen en una recta numérica los siguientes números enteros.

a. −5; 3; 0; −2; 6



b. −10; 25; 0; 5; −15

32. Ordenen de menor a mayor los números enteros de la actividad anterior. −15; −10; −5; −2; 0; 3; 5; 6; 25

33. Completen con >, < o =.

a. −9 [<] −|−8|
b. −(−4) [>] −|−5|
c. −(−10) [=] |−10|
d. |−9| + |6| [>] |−5|

34. Lean atentamente y respondan "siempre", "a veces" o "nunca" según corresponda. Escriban ejemplos para explicar cada caso.

a. El opuesto de un número entero distinto de cero es positivo.
A veces, solo cuando el número es negativo.
b. El valor absoluto de un número entero distinto de cero es positivo.
Siempre, porque representa la distancia al cero.
c. La suma de dos números enteros opuestos es cero.
Siempre.

35. Expresen en lenguaje algebraico los siguientes enunciados. Luego, respondan.

a. Lucas tenía $80, se compró un alfajor de $35 y le regalaron $20. ¿Cuánto dinero le quedó a Lucas?
$80 − $35 + $20 = $65. A Lucas le quedaron $65.
b. A la tarde la temperatura era de 25 °C, pero bajó 9 °C. ¿Cuál es la temperatura actual?
25 °C − 9 °C = 16 °C. La temperatura es de 16 °C.
c. El saldo que tenía Vera en su cuenta del banco era de $250, pero gastó $310 en servicios. ¿Cuál es el saldo actual?
$250 − $310 = −$60. El saldo actual es de −$60.
d. Un avión volaba a 3 000 m de altura y descendió 1 200 m por una tormenta. ¿A qué altura se encuentra?
3 000 m − 1 200 m = 1 800 m. Se encuentra a 1 800 m de altura.
e. El filósofo Platón nació en el año 427 a. C. y vivió 80 años. ¿En qué año murió?
−427 + 80 = −347. Platón murió en el año 347 a. C.
f. Ale salió de su departamento, bajó 4 pisos para buscar a Santi, desde ahí subieron 8 pisos hasta la casa de Lore, que vive en el piso 9. ¿En qué piso vive Ale?
x − 4 + 8 = 9. Ale vive en el piso 5.

36. Completen con números enteros las casillas en blanco para que se cumpla la condición pedida en cada caso.

a. La suma de todas las filas y de las columnas debe ser 4.

−7	4	7
4	+3	−3
7	−3	0

b. La suma de todas las filas, de las columnas y de las dos diagonales debe sumar lo mismo.

−5	0	−1
2	−2	−6
−3	−4	1

37. Lean atentamente y resuelvan.

En la siguiente tabla se indican las temperaturas máximas y mínimas que se han registrado en algunas ciudades de nuestro país durante 2019.

Ciudad	Temperatura mínima	Temperatura máxima
La Quiaca	−6	24
La Plata	0	33
Villa Carlos Paz	−1	34
Ushuaia	−5	17
Bahía Blanca	−2	36

a. ¿Qué ciudad registró la temperatura más baja?
La Quiaca.
b. ¿Qué ciudad registró la temperatura más alta?
Bahía Blanca.
c. ¿Qué ciudad registró la mayor diferencia entre las temperaturas máxima y mínima?
Bahía Blanca.
d. Ordenen las ciudades de menor a mayor teniendo en cuenta sus temperaturas mínimas.
La Quiaca, Ushuaia, Bahía Blanca, Villa Carlos Paz, La Plata.
e. Ordenen las ciudades de menor a mayor teniendo en cuenta sus temperaturas máximas.
Ushuaia, La Quiaca, La Plata, Villa Carlos Paz, Bahía Blanca.

38. Tengan en cuenta el dato y calculen.

Dato: $p \cdot q = 10$

a. $p \cdot q : 5 =$ 2

b. $q \cdot 3 \cdot p =$ 30

c. $-p \cdot 5 \cdot q =$ −50

d. $2 \cdot (p \cdot q - 5) =$ 10

39. Lean atentamente y resuelvan.

a. Escriban los números enteros que se encuentran a menos de cuatro unidades del −2.

b. Escriban los números enteros que se encuentran a tres unidades del −8.

a. Los números que se encuentran a menos de 4 unidades de −2 son: −5; −4; −3; −2; −1; 0 y 1.
b. Los números que se encuentran a 3 unidades de −8 son: −11 y −5.

40. Lean atentamente y resuelvan.

En la siguiente tabla se muestran las altitudes en metros de algunos de los puntos más altos de las provincias argentinas.

Provincia	Nombre	Altitud
Mendoza	Aconcagua	6 962 m
Catamarca	Cerro Ojos del Salado	6 891 m
San Juan	Cerro Mercedario	6 770 m
Tucumán	Cerro del Bolsón	5 552 m
Neuquén	Volcán Domuyo	4 707 m
Santa Cruz	Cerro San Lorenzo	3 706 m
Río Negro	Cerro Tronador	3 491 m
Córdoba	Cerro Champaquí	2 885 m
Chubut	Cerro Dos Picos	2 515 m
La Pampa	El Peralito	1 300 m
Buenos Aires	Cerro Tres Picos	1 239 m
Misiones	Cerro Rincón	843 m
Formosa	General Mosconi	215 m
Entre Ríos	Seguí	103 m
CABA	Villa Devoto	27 m

Consideren El Peralito (provincia de La Pampa) como el nivel cero y escriban V (verdadero) o F (falso) según corresponda.

a. Cerro Mercedario se encuentra a 5 470 m. V

b. Seguí se encuentra a −1 197 m. V

c. El cerro Tres Picos se encuentra a 61 m. F

d. El cerro Tronador se encuentra a 2 191 m y el cerro Rincón a 457 m. F

e. El cerro Dos Picos se encuentra a −1 215 m. F

Organización de los contenidos NAP (Núcleos de Aprendizajes Prioritarios)

Organización de los capítulos y contenidos del libro	NAP
Capítulo 1: NÚMEROS NATURALES 1. Sistema de numeración decimal 2. Multiplicación y división. 3. Potenciación y radicación. 4. Operaciones combinadas. 5. Divisibilidad. 6. Factorización. 7. Múltiplo común menor y divisor común mayor. 8. Lenguaje simbólico. Ecuaciones.	**En relación con el número y las operaciones** El reconocimiento y uso de los números naturales y la explicitación de la organización del sistema decimal de numeración en situaciones problemáticas que requieran: • interpretar, registrar, comunicar, comparar y encuadrar cantidades y números eligiendo la representación más adecuada en función del problema a resolver; • argumentar sobre la equivalencia de diferentes representaciones de un número usando descomposiciones polinómicas; • analizar afirmaciones que involucren relaciones de orden entre números. El reconocimiento y uso de las operaciones entre números naturales y la explicitación de sus propiedades en situaciones problemáticas que requieran: • usar cuadrados, cubos y raíces cuadradas exactas de números naturales; • producir cálculos que combinen varias operaciones en relación con un problema y un problema en relación con un cálculo, y resolverlos con o sin uso de la calculadora; • analizar y explicitar los algoritmos de las operaciones y estrategias de cálculo con números naturales; • argumentar sobre la validez de un procedimiento y el resultado de un cálculo mediante las propiedades de la suma, la resta, la multiplicación y la división; • producir y analizar afirmaciones sobre relaciones ligadas a la divisibilidad (múltiplos y divisores comunes) y sobre propiedades de las operaciones entre números naturales (distributiva, asociativa,...) y argumentar sobre su validez. **En relación con el álgebra y las funciones** El uso de distintas expresiones simbólicas en situaciones problemáticas que requieran: • explorar y explicitar relaciones (entre múltiplos y/o divisores de un número,...) y propiedades de las operaciones con números naturales (distributiva, asociativa,...) en forma oral y escrita).

Capítulo 2: FRACCIONES Y EXPRESIONES DECIMALES 9. Números racionales. Representación en la recta. 10. Fracciones equivalentes. Comparación de fracciones. 11. Operaciones con fracciones. 12. Potenciación y radicación de fracciones. 13. Operaciones combinadas con fracciones. 14. Fracciones y expresiones decimales. 15. Operaciones con decimales. Operaciones combinadas. 16. Aproximación y porcentaje.	**En relación con el número y las operaciones** El reconocimiento y uso de expresiones decimales y fraccionarias, y la explicitación de la organización del sistema de numeración en situaciones problemáticas que requieran: · interpretar, registrar, comunicar, comparar y encuadrar cantidades, y números eligiendo la representación más adecuada en función del problema a resolver; · argumentar sobre la equivalencia de diferentes representaciones de un número usando expresiones fraccionarias y decimales finitas y/o puntos de la recta numérica; · analizar afirmaciones que involucren relaciones de orden entre números. El reconocimiento y uso de las operaciones entre fracciones y expresiones decimales y la explicitación de sus propiedades en situaciones problemáticas que requieran: · producir cálculos que combinen varias operaciones en relación con un problema y un problema en relación con un cálculo, y resolverlos con o sin uso de la calculadora; · analizar y explicitar los algoritmos de las operaciones y las estrategias de cálculo con expresiones fraccionarias y decimales.
Capítulo 3: FUNCIONES 17. Gráficos y tablas. 18. Funciones. 19. Función de proporcionalidad directa. 20. Función de proporcionalidad inversa.	**En relación con el álgebra y las funciones** El análisis de variaciones en situaciones problemáticas que requieran: · reconocer y utilizar relaciones directa e inversamente proporcionales, usando distintas representaciones (tablas, proporciones, constante de proporcionalidad,...) y distinguirlas de aquellas que no lo son; · explicitar y analizar propiedades de las relaciones de proporcionalidad directa (al doble el doble, a la suma la suma, constante de proporcionalidad) e inversa (al doble la mitad, constante de proporcionalidad); · interpretar y producir tabla e interpretar gráficos cartesianos para relaciones entre magnitudes discretas y/o continuas.
Capítulo 4: CUERPOS 21. Clasificación de los cuerpos. 22. Poliedros regulares. 23. Desarrollo plano de los cuerpos. 24. Punto, recta y plano.	**En relación con la geometría y la medida** El reconocimiento de cuerpos geométricos y la producción y el análisis de construcciones explicitando propiedades involucradas en situaciones problemáticas que requieran: · analizar cuerpos (prismas, pirámides, cilindros, conos y esferas) para caracterizarlos y clasificarlos.

Capítulo 5: ÁNGULOS **25.** Ángulos. Sistema sexagesimal y operaciones. **26.** Clasificación de ángulos. **27.** Mediatriz de un segmento. **28.** Bisectriz de un ángulo.	Los temas se proponen como objetos de estudio para luego desarrollar los contenidos referidos a **Geometría y medida** del capítulo 6.
Capítulo 6: FIGURAS PLANAS **29.** Triángulos. **30.** Construcción de triángulos. **31.** Cuadriláteros. **32.** Construcción de cuadriláteros. **33.** Circunferencia y círculo. **34.** Construcción de circunferencias. **35.** Polígonos. **36.** Construcción de polígonos regulares.	**En relación con la geometría y la medida** El reconocimiento de figuras y la producción y análisis de las construcciones explicitando las propiedades involucradas en situaciones problemáticas que requieran: · analizar figuras (triángulos, cuadriláteros y círculos) para caracterizarlas y clasificarlas; · explorar y argumentar acerca del conjunto de condiciones (sobre lados, ángulos, diagonales y radios) que permiten construir una figura; · construir figuras a partir de diferentes informaciones (propiedades y medidas) utilizando compás, regla, transportador y escuadra, explicitando los procedimientos empleados y evaluando la adecuación de la figura obtenida; · analizar afirmaciones y producir argumentos que permitan validar las propiedades: triangular y de la suma de los ángulos interiores de triángulos y cuadriláteros.
Capítulo 7: PERÍMETRO, ÁREA Y VOLUMEN **37.** Perímetro y área de figuras planas. **38.** Área lateral y total de cuerpos. **39.** Unidades de capacidad y unidades de volumen. **40.** Volumen de poliedros. **41.** Volumen de cuerpos redondos.	**En relación con la geometría y la medida** La comprensión del proceso de medir, considerando diferentes unidades y sistemas en situaciones problemáticas que requieran: · estimar y medir volúmenes –estableciendo equivalencias con la capacidad-, eligiendo la unidad adecuada en función de la precisión requerida; · argumentar sobre la equivalencia de distintas expresiones para una misma cantidad, utilizando las unidades de longitud, área, volumen y capacidad del SIMELA y sus relaciones. El análisis y el uso reflexivo de distintos procedimientos para estimar y calcular medidas en situaciones problemáticas que requieran: · calcular áreas de figuras, áreas y volúmenes de cuerpos, estimando el resultado que se espera obtener y evaluando la pertinencia de la unidad elegida para expresarlo; · elaborar y comparar distintos procedimientos para calcular perímetros y áreas de polígonos; · calcular volúmenes de prismas estableciendo equivalencias entre cuerpos de diferente forma mediante descomposiciones y descomposiciones.

Capítulo 8: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA 42. Variables, población y muestra. 43. Frecuencias absolutas y relativas. 44. Promedio, mediana y moda. 45. Experimentos aleatorios. Probabilidad simple. 46. Cálculo combinatorio.	**En relación con la probabilidad y la estadística** La interpretación y elaboración de información estadística en situaciones problemáticas que requieran: · recolectar y organizar datos para estudiar un fenómeno y/o tomar decisiones; · interpretar tablas y gráficos (pictogramas, diagramas de barras, gráficos circulares, de línea, de puntos) y analizar sus ventajas y desventajas en función de la información que se quiere comunicar; · construir gráficos adecuados a la información a describir; · calcular la media aritmética y analizar su significado en función del contexto. El reconocimiento y uso de la probabilidad como un modo de cuantificar la incertidumbre en situaciones problemáticas que requieran: · comparar las probabilidades de diferentes sucesos, incluyendo seguros e imposibles, para espacios muestrales finitos.
Capítulo 9: NÚMEROS ENTEROS 47. Números negativos. 48. Orden y representación. 49. Adición y sustracción. 50. Multiplicación y división. 51. Operaciones combinadas.	Se propone como tema complementario.